This book was produced in EPUB format by the Internet Archive.

The book pages were scanned and converted to EPUB format automatically. This process relies on optical character recognition, and is somewhat susceptible to errors. The book may not offer the correct reading sequence, and there may be weird characters, non-words, and incorrect guesses at structure. Some page numbers and headers or footers may remain from the scanned page. The process which identifies images might have found stray marks on the page which are not actually images from the book. The hidden page numbering which may be available to your ereader corresponds to the numbered pages in the print edition, but is not an exact match; page numbers will increment at the same rate as the corresponding print edition, but we may have started numbering before the print book's visible page numbers. The Internet Archive is working to improve the scanning process and resulting books, but in the meantime, we hope that this book will be useful to you.

The Internet Archive was founded in 1996 to build an Internet library and to promote universal access to all knowledge. The Archive's purposes include offering permanent access for researchers, historians, scholars, people with disabilities, and the general public to historical collections that exist in digital format. The Internet Archive includes texts, audio, moving images, and software as well as archived web pages, and provides specialized services for information access for the blind and other persons with disabilities.

Created with hocr-to-epub (v.1.0.0)

CONCEPPOS Y TEOQRÍAS ENLA-ÓHmNCIá

Los contenidos de este libro pueden ser reproducidos en todo o en parte, siempre y cuando se cite la fuente y se haga con fines académicos y no comerciales

JESÚS MOSTERÍN EN LA C IEN CIA Alianza Editorial

Primera edición en-«Altanza Universidad»: 1984 Primera edición en «Ensayo»: 2000 Primera reimpresión: 2003 (cs) Creative Commons O Jesús Mosterín O Alianza Editorial, S. A., Madrid, 1984, 1987, 2000, 2003 Caile Juan Ignacio Luca de lena, 15; 28027 Madrid; teléf, 91 393 88 88 www.alianzaeditorial.es ISBN: 34-206-6741-2 Depósito legal: M. 32,499-2003 Compuesto e impreso en Fernández Ciudad, $. L. Printed in Spain

ÍNDICE PRÓLOGO A LA TERCERA EDICIÓN

coococnrnnonenncncnccnnicicoronanancns a ds LA ESTRUCTURA DE LOS CONCEPTOS CIENTÍFICOS ..... Clasificaciones: condiciones formales de adecuación ooo... Particiones y relaciones de equivalencia ...concnmonconnennianiancnarrrennos Clasificaciones: condiciones materiales de adecuación ....omoomommo» jerarquías de clasificaciones ..... OA NEN naa Conceptos COMParativOS cemmcorinnmencaarennacnos elit isis Conceptos métricoS emm. iaa os is Escalas ordinales W.0coioioccnnoconionanncnns A Escalas proporcionales ..... O das Magnitudes extensivas € IMtensivas cmmmciccacenenacncans des Merrización fundamental y derivada .o.ooomomincnccnnccnconecins: nes Ventajas de los CONCeptos IMÉtTICOS comomomoonaronnos oa LOS CONCEPTOS MEPRICO SS inaisisió O AN iS Medida y metrics IS SISpEnias COMIDAS inline Escalas ordinales ..... e o de SIS CEMAS EXCESIVOS ii nds Escalas proporcionales s.m... cdi O : El sisterma extensivo de LASA cocoroonacoonnccnracnonencnrcanionos ina El concepto méttico de Masa siii ecos dd El sistema extensivo de longitud commmoncccnccanos RS El eontepto métrico de longitud vesasenrasiaia cias cid eS 11 3 17 19 22 24 26 30 34 35 39 40 42 45 46 47 49 50 52 13 ple 57 29

-. CONCEPTOS Y TEORÍAS EN LA CIENCIA | El sistema extensivo de Tiempo mmmmccrsnorrens ici Ea: El concepto métrico de tieMpO smsccrcnonocanoncronannonaaran ron oonar oscar canas Sistemas de diferencias ....o..... PS Eon ina E Escalas de Intervalos ye ia ati El concepto métrico de teDperatura comiococcnnennananonnonranraranonnanoranoos Comparación de escalas y sistemas cualitativos ommcmiinenoso dais El rol de los conceptos métricos en la CIencCia comconnorcarecccranonnoronos TAXONOMÍA FORMAL la Clasificar ..... ecos o cat Particiones y relaciones de equivalencia ccoo... vids as Ds La relación de mayor o igual ÍIDUIA coooonniccinenicninranirornonos as Terarquias ICAO MICA ai La paradoja de Gregg comicnaccnanoro ridad Superposición de particiónes pitan Fusión de particiones ..... ic El retículo. delas particiones crisi ei a MEREOLOGÍA, CONJUNTOS Y ONTOLOGÍA BIOLÓGICA ..cuoo. ¿Qué es un Individuo? mnmmcccncnronoranonnacnnos» Dal ¿Qué es un CORJUNTO? ismmcanocnaos ici aioriel evt De Especies y organismos como individuos y como Conjuntos sc... Mero lal aitas a MATERIA Y ACOMUSMIO ia os Etumolosia de mátetla iii An aida El concepto aristotélico de materia cmo. dá E l Etnología de CUPO ici a ida El atomismo especulativo s..... A ls El atomismo CientÍfiCO ..cooconcococnconennannanconirncconconsanaran carro ronca ranaenóns La relativización del atomismo ..... PR A Recordatorio de la siruación actual ..ooononnonicccnoannorcnccono rar onnoranennros Die evo ATISTÓCOLES it KANT COMO EILÓSOFO DE LA CIENCIA co... A Mando nde anna ts at A A RIRECOMO IÓNICO ii o Kant como filósofo de la matemática.....comomormonor.». eiii La concepción kantiana del espacio y el tiempo ccmcormionrioiciicanos 8 101 182 106 110 115 121 122 123 127 128 131 134 136 138 143 143 144 147 149 152

The text on this page is estimated to be only 45.06% accurate

AN A PPP” ÍNDICE | Temprano interés de Kant por la dinámica cooonocnnoninninnonennonncnronacs Las especulaciones cosmológicas de Kant .o.ooonneoccoonannonrnnos: di La evolución de la filosofía kantiana de la ÉÍSICA cooocoinnnininiianias.. El apriorismo de las leyes de la naturaleza ..o.ooonoccaninninninninnonrso ds PErCIDIE Y DENSAL iris E LA POLÉMICA ENTRE FREGE Y HILBERT ACERCA DEL MÉTODO AXIOMÁTICO oenencrsrnensiariassinsianas se | El desarrollo de la poléMica...oooonnncnoonionicocnocanrarnarenonnrnos cias El método axiomático concreto 0 CÍÁSICO ..ocoomaninninnincnancnncanconrnns Las geometrías no euclideas oococonconcnonaconononos aia El método axiomático abstracto O Hilbertiano....aommomm.. cicoteds Frege, analista del método hilbertiano ....onoonnccanacinconacrncororearcnanooos o A e o A DRAUCCÓON tr di ia Teorías concretas y abstraCláS commons: il HISTORIA Y TEORÍA ABSTRACTA. ccrrcnsasnsiosnsrsircrsososasaiosonaroeriosess Sistema estruc ia FUStonia y CCOTÍA pais ia Sistemas homogéneos y heterogéneos emmm... A CONCEPTOLES Y TEOTEMAS orde s Teoría de una estructura eomomccnnonoonccnnnasos nin TOd3LEOHÍA ES MACEMáeS aaa TEORÍAS Y MODELOS sciciniiiiiacis IR SI O aa Tipos de siniatidan lts SOMO ÍA uti raid bios ESHUCEUtS ta dada DT Lenguajes tormes ds Verdad y SAUIsÍacciÓn ini den Consecuencia e Independencia eccononcccnonennes pi I É COrFIas URETA AAA FAA AAA esa dd 4 4 44444 2 daa roareeedr rr errar dardo rr . Modelos REARFIRAEARAAAEAETFTIIAAATAATFAIAARA RRA RARA AAA UIAF ANACRE OIR AAA a . E h |] al | quiva eXxcia e ement DEFAAE AAA rr adoos dae dicas aserrada ad aro 5 Teorías axlomatizables occ. O AA Teorías completas commcmmm... O PE Teorías K-categóricas FIPPEFEFFA4AUII0OAIIFRAAF AAA IAEA A FAA oso Fdo Adoos 9 ¿e e A a

The text on this page is estimated to be only 48.70% accurate

11. 12, 13. 14, IN A o A

PRÓLOGO A LA TERCERA EDICIÓN El núcleo duro de la filosofía de la ciencia está constituido por el análisis de los resultados intelectuales de la empresa científica, y en especial por el de las teorías científicas y de los conceptos empleados en su formulación. En este libro se abordan varios temas fundamentales de la filosofía de la ciencia de un modo que, sin menoscabo del rigor, pretende ser directo y accesible. No se rehúyen las fórmulas y los signos matemáticos, cuando facilitan la comprensión, pero tampoco se abusa de la formalización. La gran aceptación que han tenido las ediciones anteriores entre estudiantes y estudiosos de la filosofía de la ciencia se debe sin duda al carácter ágil y conciso de los ensayos que el libro reúne, que tratan de combinar la claridad con la precisión. Por eso he resistido la tentación de mejoras la presentación a base de complicarla, introduciendo temas y nociones más difíciles de las teorías avanzadas de la ciencia actual. El nivel de las explicaciones y pao sigue siendo elernental, | Esta recopilación de artículos no constituye en il alguno un libro de texto, ni un tratado sistemático. La filosofía de la ciencia todavía está en plena ebullición y las cosas aún no están maduras para síntesis definitivas (en contraste con la lógica formal, por ejermplo). Sin embargo, aunque los capítulos del libro son como 11

 catas dispares en la temática epistemológica, todos ellos están escritos desde la misma perspectiva y se complementan mutuamente. Dado el origen independiente de los artículos que lo componen, ciertas repeticiones y discrepancias terminológicas son inevitables, aunque en esta nueva edición he procurado reducirlas al mínimo, suprimiendo algunos pasajes repetitivos y unificando los signos y los términos técnicos. De todos modos, algunas repeticiones permanecen, a fin de conservar el carácter de legibilidad independiente de cada capítulo, tan apreciado por los lectores. Los principales cambios en el contenido de esta edición respecto a las anteriores consisten en la supresión de un: artículo y la incorporación de tres nuevos capítulos. Se ha suprimido el anterior artículo sobre funciones y composición de relaciones, de tema puramente lógico, y que no tenía nada que ver con el resto del libro, según se me hizo observar en diversas ocasiones. Las nuevas incorporaciones son: el capítulo 2 sobre «Los conceptos métricos», que viene a ampliar y profundizar la presentación de los mismos en el capítulo 1, que se había quedado corta; el capítulo 4 sobre «Mereología, conjuntos y ontología biológica», que introduce la polémica actual sobre las especies biológicas y complementa el carácter más meramente abstracto y formal del capítulo 3; y el capítulo 9 sobre «Teorías y modelos», que analiza y define de un modo sistemático las principales propiedades metamatemáticas de las teorías, sirviendo así de punto de partida preciso para las consideraciones de los capítulos siguientes. Así, el libro sale considerablemente reforzado en sus dos temas principales, que le dan título: los conceptos científicos y las teorías científicas. También se ha añadido al final una breve lista de referencias y sugerencias bibliográficas y se han corregido las erratas detectadas. En conjunto, los cambios han sido tan numerosos que se ha efectuado la recomposición entera del texto. | Los cuatro primeros capítulos tratan de los conceptos científicos. Los tres siguientes, de temas históricos. Los capitulos 8 al 12 dilucidan la estructura y función de las teorías científicas. Los dos últimos se ocupan de discusiones y polémicas. En conjunto, espeiZ

PRÓLOGO A LA TERCERA EDICIÓN ll A A A A A A MA A ARA RARA RA ARA A RA A RR ro que proporcionen al lector una cierta familtaridad con el análisis formal de conceptos y teorías. En cualquier caso, no es necesario leerlos todos, ni leerlos en el orden en que aparecen. El lector puede confeccionar su propio menú. Los signos lógicos empleados son los cinco conectores 1 (10), A (y), Y (o), = > (si ..., entonces ...), E (si y sólo si), y los dos cuantificadores Y (para cada) y 3 (hay un). Los signos conjuntistas son los habituales. En especial, E es la pertenencia, € la inclusión, U la unión, "£: A->B significa que Fes una función cuyo dominio es Á y cuyo recorrido está incluido en $. Espero que el uso de estos signos facilite y no entorpezca la lectura de las páginas que siguen. En cualquier caso, si algo no se entiende o no interesa en una primera lectura, sálteselo el lector. Mola, enero de 2000 Jesús MOSTERÍN 15

CAPÍTULO 1 LA ESTRUCTURA DE LOS CONCEPTOS CIENTÍFICOS

El mundo nos bombardea continuamente con todo tipo de radiaciones, roces y mensajes. Nuestro aparato sensorial selecciona y procesa esa información bruta que nos llega del mundo. Si tuviéramos otro aparato sensorial diferente del que tenemos, percibiríamos el mundo de distinto modo. Si nuestra retina fuese sensible a otro intervalo distinto del espectro electromagnético, veríamos un paisaje infrarrojo o ultravioleta muy distinto al que vemos. Si nuestros oídos fueran sensibles a otras frecuencias, escuciHlaríamos un mundo ahora inaudito para nosotros. Y si tuviéramos sentidos sensibles a la radioactividad o al magnetismo, percibiríamos el mundo de un modo ahora inimaginable. Esto no significa que nuestros sentidos inventen el mundo ni que nuestras percepciones no sean objetivas. Tan objetiva es una foto en blanco y negro como una foto en color y como una radiografía. Pero nuestro aparato sensorial condiciona nuestra percepción del mundo y determina las pautas en las que ésta es posible. El mundo percibido es la resultante de al menos dos factores: nuestro aparato sensorial y el mundo exterior. De igual modo, lo que pensemos y digamos del mundo no depende sólo de él, sino también de nuestro sistema conceptual, que selecciona, condiciona y determina los aspectos del mundo que tenemos en cuenta, en los que pensamos y de los que hablamos. El 15

 mundo pensado es también la resultante de al menos dos factores: nuestro sistema conceptual y el mundo real. En nuestra actividad científica tenemos que partir de nuestro aparato sensorial y del sistema conceptual plasmado en nuestro lenguaje ordinario. Pero difícilmente podría ponerse en marcha la empresa científica si no nos fuera posible trascender las limitaciones de nuestro aparato sensorial y conceptual. Mediante un hardware adecuado, mediante instrumentos apropiados que constituyen como extensiones de nuestros sentidos —telescopios, microscopios, cámaras fotográficas y de cine, balanzas, voltímetros, cuentarrevoluciones, veletas, brújulas, barómetros, magnetófonos, antenas de radio, etc.—, podemos discriminar mucho más finamente que con nuestros sentidos y podemos captar mensajes y radiaciones inasequisibles a nuestro aparato sensorial. De igual modo podemos extender y precisar nuestro sistema conceptual mediante un sofware adecuado, introduciendo conceptos más precisos y de mayor alcance que los del lenguaje ordinario, conceptos científicos que nos permiten describir hechos y formular hipótesis con una precisión y universalidad crecientes. El progreso de la ciencia no siempre consiste en el aumento del número de verdades que conocemos. La noción de verdad es relativa a la de enunciado, y ésta a la de concepto. Qué verdades haya depende de qué conceptos empleemos. Y muchas veces el progreso de la ciencia consiste no en un aumento del número de verdades expresadas con un sistema conceptual dado, sino en el cambio del sistema conceptual, en su ampliación o extensión o en su sustitución por otro. El mundo no está estructurando de por sí de un modo unívoco. Somos nosotros los que lo estructuramos al proyectar sobre él nuestros conceptos. Así, propiedades como la temperatura o la inteligencia no son instrínsicamente cualitativas o cuantitativas, sino que ese carácter sólo está en los conceptos que empleamos para hablar de ellas. Sin embargo, una vez introducidos ciertos conceptos de un determinado modo, ya no podremos usarlos a 16

LA ESFRUCTURA DE LOS CONCEPTOS CIENTÍFICOS a 1 A A A A A A A ÁS qIíIKÁKAKA

CONCEPTOS Y TEORÍAS EN LA CIENCIA PP e e _— o
Pqx_x.PXPÓ«- q I[6 2A4 + A = < A A O Á O INR r q$qQroOÓq—z

 (ercétera), los mismos animales caen bajo varios de estos conceptos (pertenecientes al Emperador, amaestrados) y hay animales que no caen bajo ninguno de esos conceptos. En general, cuando hablamos de una dstiión esperamos que esté perfectamente delimitado cuál sea el ámbito o dominio de individuos que vamos a clasificar, que a cada concepto clasificatorio corresponda al menos un individuo de ese ámbito, que ningún individuo caiga bajo dos conceptos clasificatorios distintos y. que todo individuo del ámbito en cuestión caiga bajo alguno de los conceptos de la clasificación. La extensión de un concepto es la clase de las cosas a las que ese concepto se aplica: Si identificamos los conceptos clasificatorios con sus extensiones, entonces podemos resumir las condiciones formales de adecuación de una clasificación (no solapante) diciendo que la clasificación debe constituir una partición, en el sentido matemático de este término. Sea A una clase cualquiera de objetos. Una colección de conjuntos B, ... B_ constituye una partición de A st y sólo sí (1) cada uno de esos conjuntos es un subconjunto no vacío de 4, (2) no hay ningún elemento común a dos de esos conjuntos y (3) cada elemento de Á está en alguno de esos conjuntos. Es decir, (B, ... Bj es una partición de Á sí y solo si se cumplen las tres condicioness (YD B£CAA BA para cada ¿(1 < ¿

 pao uE SOI O COCO uuu a ES CCOO 0 CO E De O O, OO CE q 00 > = 5mI TS cia es una relación reflexiva, simétrica y transitiva. Es decir, una relación Res una relación de equivalencia en una clase A si y sólo si (1) todo individuo de Á está en la relación R consigo mismo, (2) si x está en la relación Rcon y, entonces también y está en-la relación Rcon x, y (3) siempre que u esté en la relación Rcon wy westé en la relación X con 2 también u estará en la relación R con z, Por ejemplo, la identidad es una relación de equivalencia, así como también lo es la de paisanaje entre humanes y la de congruencia entre triángulos. Sea R una relación de equivalencia en A, Sea x un elemento de A. Mediante x, designamos la clase de equivalencia de x respecto a K, es decir, la clase de todos los elementos de Á que están con xen la relación KR. 0 xp = iye Al yRxj De aquí se sigue que las clases de equivalencia de x e y respecto a Rserán la misma si y sólo si xestá en la relación Rcon y. Liamemos conjunto cociente de A respecto a R (en signos A/R) al conjunto de todas las clases de equivalencia de elementos de A respecto a R, es decir, AR = ix lx € Aj Por definición, ninguna de las clases de equivalencia de A/R es vacía, dos clases de equivalencia distintas de A/R no tienen elementos comunes (pues si los tuviesen, serían la misma clase) y entre todas abarcan Á entera, pues para cada elemento x€e 4, x está en x, y por tanto U x, = A xEAÁ Por tanto, si Res una relación de equivalencia en A, el conjunto cociente de Á respecto a. Res una partición de 4. 20

LA ESTRUCTURA DE LOS CONCEPTOS CIENFÍFICOS A la inversa, toda partición da lugar a una relación de equivalencia. Sea Q =1B, ... Bj una partición de A. Podemos definir la relación R_ entre elementos de Á del siguiente modo: para cada dos elementos x y z de A, xestá en la relación R con z si y sólo si tanto como zestán en la misma subclase B, de A. Es decir, Ro =1(x, 2) € P4ilhayunil < ¿

 A ca lo mismo que /mésa/-—-, pero no en francés —la proferencia /epé?!, espeso, significa algo distinto que /epé/, espada. Esta relación de equivalencia da lugar a la clasificación de los sonidos de una lengua en fonemas. En geometría euclídea, la relación de paralelismo es una relación de equivalencia entre las rectas del plano. Esta relación da lugar a la partición del conjunto de las rectas en direcciones. La dirección de una recta es precisamente la clase de equivalencia de esa recta respecto a la relación de paralelismo, es decir, la clase de todas las rectas paralelas a ella. Vemos que la clasificación siempre tiene la misma estructura, aunque se establezca en ciencias tan distintas como la química, la fonología y la geometría. Cada átomo pertenece a un y sólo un elemento. Cada sonido de una lengua pertenece a un y sólo un fonema. Cada recta de un plano pertenece a una y sólo una dirección. Clasificaciones: condiciones materiales de adecuación En la práctica científica no sólo se exige que una clasificación satisfaga las condiciones formales de adecuación que acabamos de comentar, sino también que satisfaga ciertas condiciones materiales de adecuación peculiares de la ciencia de que se trate. Esto mismo suele expresarse en la pretensión de que la clasificación sea natural. Pero ¿qué significa que una clasificación sea natural? Limitémonos a considerar el asunto en lo que atañe a la zoología. ¿Qué es una clasificación zoológica natural? Podemos clasificar a los animales en tres clases: la de los que no Megan a los 2 años de vida, la de los que mueren entre los 2 y los 80 años y la de los que viven más de 80 años. Esto constituye una clasificación formalmente correcta de los animales. En efecto, los tres casos se dan, cada animal se encuentra en alguno de esos casos y ningún animal está a la vez en dos de esos casos. Sin embargo, esta clasificación sería rechazada por la comunidad de los zoólogos 22

por no ser natural, ¿Por qué no es natural? ¿Y por qué es natural la clasificación de los animales en filos o phyla (anélidos, moluscos, erc.)? La respuesta es que podemos enunciar muchas e Interesantes leyes generales acerca de los anélidos, por ejemplo, pero no acerca de los animales que viven entre 2 y 80 años, El identificar un animal concreto como anélido nos permite hacer muchas predicciones sobre ese animal, mientras que el identificarlo como viviendo entre 2 y 80 años no nos permite predecir gran cosa acer- . ca de él, En general, suele considerarse que una clasificación es más natural que otra si los conceptos que constituyen la primera son más fecundos científicamente, en el sentido de que sirven para formular leyes más generales o más precisas o con más poder explicativo o predictivo, Ésta es la razón que ya llevó. a Aristóteles a incluir los cetáceos entre los mamiferos, y no entre los peces. Así resultaba posible formular leyes generales acerca de los peces — todos los peces son ovíparos, todos los peces son de sangre fría, todos los peces respiran por agallas, etc.— que no hubieran valido de haber sido incluidos los cetáceos entre los peces. A la hora de concretar más lo que se entiende por clasificación natural en zoología, las opiniones discrepan, dando lugar a diversas escuelas de taxonomía, tales como la evolutiva y lá fenética. Según la taxonomía evolutiva, una clasificación natural ha de reflejar las relaciones filogenéticas entre los animales, agrupando en las misrinas clases o taxones a los animales que están evolutivamente emparentados entre sí. Según la taxonomía fenética, la clasificación más natural será aquella que mejor refleje el parecido actual entre los animales, agrupando en los mismos taxones a los animales que más caracteres comunes compartan, con independencia de su genealogía. La polémica entre taxónomos evolutivos y taxónomos fenéticos se extiende también a la cuestión de si el humán inventa (como quieren los segundos) o más bien descubre [como pretenden los primeros) los diversos taxones biológicos y en especial las especies. Así escribe Ernst Mayr, uno de los más ilustres taxónomos evoluti23

 A vos, que «los taxones inferiores no son colecciones arbitrarias, sino comunidades reproductivas mantenidas juntas por relaciones de cortejo y separadas de otras unidades similares no por las decisiones arbitrarias del clasificador, sino por los mecanismos aisladores codificados en el programa genético de cada organismo» ?. Robert Sokal, uno de los iniciadores de la taxonomía fenética, propone por el contrario «basar las clasificaciones enteramente en el parecido, definiendo como clasificaciones naturales aquellas que determinan taxones cuyos miembros son en algún sentido más similares entre sí que con los miembros de los otros taxones. De este concepto de naturalidad se sigue... que la clasificación natural será también la más predictiva» *, No es éste el lugar de estudiar esta interesante polémica. Sólo nos interesa señalar cómo, junto a las condiciones formales de adecuación de una clasificación, estructurales y comunes a todas las ciencias, en cada ciencia particular se suelen exigir condiciones materiales de adecuación o naturalidad, aunque, como muestra el caso de la biología, no siempre la comunidad científica está en completo acuerdo sobre en qué consista esa naturalidad. Jerarquías de clasificaciones Dadas dos clasificaciones del mismo dominio de objetos, a veces es posible compararlas en cuanto a finura y, a veces, no. Así, por ejemplo, la clasificación de los primates en prosimios y simios no es comparable con la clasificación de los mismos en machos y hembras. La clasificación de los libros por su fecha de publicación no es comparable con su clasificación por el lugar de su impresión. Sin embargo, la clasificación de los mamíferos en familias sí es 5 Ernst Mayr: Principles of Systematic Zoology, McGraw-Hill Book Co., Nueva York, 1969, pp. 76-77. * Robert Sokal: «Numerical Taxonomy», Scientific American, diciembre de 1966, pp. 108-109. Los principios de la taxonomía fenética se encuentran muy bien expuestos en P. Sneath y R. Sokal: Nimerical Taxonomy W. H. Freeman and Co., San Francisco,

 ma A mr rn —n— — í RÁ Á Á — comparable con su clasificación en Órdenes. La primera es más fina que la segunda. Y la clasificación del territorio nacional por municipios es más fina que su clasificación en provincias. Sean A = ÍA, ..., Aj y B = 1B, ..., B,) clasificaciones o particiones del mismo dominio D. Entonces podemos decir que Á es tanto o más fina que Bsi y sólo si para cada 4,€ A y cada B,€ B ocurre que 4,€ B, 0 4,M B, = a) Suele ser característico de las ciencias en que los conceptos clasic ficatorios desempeñan un papel importante el que las clasificaciones no aparezcan solas, sino que se usen diversas clasificaciones de finura decreciente del mismo dominio, engarzadas entre sí y formando jerarquías, donde por jerarquía entendemos una sucesión de clasificaciones comparables entre sí y de finura decreciente. Más precisamente, decimos que H es una jerarquía taxonómica sobre D si y solo si hay B, ... B., tales que: (1) A = iB .. BJ. (2) Para cada AS < 1): B,es una partición de D. (3) Para cada 41 < / de q — 1: B, es tanto o más fina que ÉB,, Aquí D es el dominio básico de individuos, y cada B. es una categoría de nivel ¿. En general, una jerarquía sobre D es una clase de categorías sobre D. Una categoría sobre D es una partición de D, es decir, una clase de taxones de D. Y un taxón de D es una clase de elementos de D que pertenece a una de las particiones de D consideradas. La jerarquía taxonómica más conocida es la jerarquía procedente de Linné para la clasificación de los organismos. La jerarquía linneana L abarca 7 categorías, cada una de las cuales es una partición del conjunto de los organismos: L = [especie, género, familia, orden, clase, filo, reinoj Cada organismo es miembro de un taxón de cada una de esas siete categorías. Así, el perro Lassie es a la vez miembro del taxón 2)

 Canis familiaris (de la categoría especie), del taxón Canis (de la categoría género), del taxón Canidae (de la categoría familia), del taxón Carnivorae (de la categoría orden), del taxón Mammalia (de la categoría clase), del taxón Craniata (de la categoría filo) y del taxón Animalia (de la categoría reino). Aunque las jerarquías taxonómicas más conocidas son las de la biología, también en otras ciencias nos encontramos con diversas clasificaciones de finura decreciente que forman jerarquías. Pensemos en las clasificaciones de los átomos en química. Una clasificación muy fina es la partición de los átomos en isótopos, otra menos fina es su partición en elementos, otra aún menos fina es su partición en grupos o familias. Por tanto, H = [isótopo, elemento, grupo) constituye una jerarquía sobre el dominio de todos los átomos. Cada átomo es miembro de un taxón de cada una de esas categorías. Así, por ejemplo, un átomo determinado puede ser a la vez miembro del taxón potasio-39 (de la categoría isótopo), del taxón potasio (de la categoría elemento) y del taxón alcalino (de la categoría grupo) ?. Conceptos comparativos Así como los conceptos clasificatorios corresponden a los sustantivos y adjetivos del lenguaje ordinario, así también los conceptos comparativos encuentran su punto de partida en un rasgo de nuestra lengua cotidiana: el llamado por los gramáticos grado comparativo de los adjetivos. El lenguaje ordinario no sólo nos permite «clasificar» a nuestros congéneres en altos o bajos; también nos permite precisar que un determinado humán, aunque bajo, es más alto que otro. Expresiones como «más alto», «más ? Lo dicho hasta aquí sobre las clasificaciones, particiones, relaciones de equivalencia y jerarquías se encuentra ampliado en el capítulo 3, «Taxonomía format». 26

A ——_—_—_— -- y O O A A AM viejo», «mayor», «mejor», «más ligero», etc., corresponden a conCeptos comparativos. Introducir un concepto comparativo para una característica que los individuos de un dominio poseen en mayor o menor erado consiste en definir dos relaciones (una de coincidencia y otra de precedencia) respecto a esa característica, es decir, indicar cuándo dos objetos de ese dominio coinciden respecto a esa característica y cuándo uno precede al otro respecto a ella. Un concepto comparativo sirve así para establecer comparaciones en más y menos. Si identificásemos los conceptos cualitativos con los clasificatorios y los cuantitativos con los métricos, resultaría que en la ciencia se usan otros tipos de conceptos además de los cualitativos y cuantitativos; los conceptos comparativos (o topológicos). Los conceptos comparativos no sólo permiten diferenciar más finamente que los clasificatorios, sino que además representan un primer paso para la posterior introducción de conceptos métricos. Llamemos — y < a las relaciones de coincidencia y precedencia respecto a una característica determinada que los objetos de un dominio Á poseen en mayor o menor grado. El concepto comparativo ha de cumplir ciertas condiciones formales de adecuación para ser científicamente aceptable. En primer lugar, — ha de ser una relación de equivalencia en A (es decir, todo objeto ha de coincidir consigo mismo respecto a la característica de que se trate; si un objeto coincide con otro, entonces también el otro ha de coincidir con el uno; y sí uno coincide con otro y ese otro con un tercero, entonces el primero ha de coincidir con el tercero). < ha de ser transitiva en A (es decir, si un objeto es menos -—respecto a la característica en cuestión— que otro y ese otro menos que un tercero, entonces el primero es menos que. el tercero). Además, < ha de ser —-irreflexiva (es decir, el que un objeto coincida con otro respecto a la característica estudiada excluye que sea mayor O menor que él respecto a esa misma característica). Finalmente, todos los miembros de A han de ser comparables respecto a (>, < > les decir, dados dos objetos cualesquiera, o bien coinciden 27

_. CONCEPTOS Y TEORÍAS EN LA CIENCIA... AS entre sí, o bien uno de ellos es más o menos que el otro respecto a la característica de que se trate). Podemos resumir las condiciones formales de adecuación de un concepto comparativo $<=$, $<>$ en un dominio Á exigiendo que , es un sistema comparativo sí y solo si para cualesquiera elementos x, y z de Á ocurre que: (DD xx ZE ESA E a A id (4)

od de equilibrada (o bien si x y zson el mismo cuerpo). Y decimos que x tiene más masa que z si colocados ambos en sendos platillos de la balanza, ésta se desequilibra a favor del platillo donde hemos colocado x. Este concepto comparativo de masa cumple las 6 condiciones formales de adecuación. En este caso las condiciones (1) y (5) se cumplen por definición, mientras que al suponer que también se cumplen las demás, estamos haciendo diversas hipótesis (por lo demás triviales, claro) tanto sobre el comportamiento de la naturaleza como sobre el buen estado de nuestra balanza. En paleontología se emplea un concepto comparativo de antigúedad cuando resulta difícil datar absolutamente los fósiles hallados en un yacimiento estratificado. El dominio de ese concepto comparativo de antigiiedad está constituido por los fósiles que se encuentran en los diversos estratos geológicos del yacimiento. Decimos que un fósil x coincide respecto a antigiiedad con un fósil z si y sólo si x y 2 se encuentran en el mismo estrato. Y decimos que x es más antiguo que z si x se encuentra en un estrato inferior a aquel en el que se encuentra z. También este concepto cumple las 6 condiciones formales de adecuación, y como en el primer caso, también aquí (1), (2) y (5) se cumplen por definición, y que se cumple el resto es una hipótesis basada en nuestras ideas acerca de la formación de las rocas sedimentarias y da fosilización de los restos de organismos. | Cuando queremos precisar más nuestras nociones acerca de un ámbito determinado, con frecuencia resulta más fácil introducir un concepto comparativo que uno métrico. Así podríamos tratar de precisar el concepto de fortaleza (muscular) en un dominio de humanes mediante el test de echarse un pulso (sería más fuerte que otro el que, echándose un pulso, derribase al otro; coincidirían los que, echándose un pulso, ni derribasen ni fuesen derribados). Pero estaría por ver si este concepto cumple más o menos las condiciones formales de adecuación, y si sirve para algo. El concepto de metal es en principio clasificatorio. Clasificamos los elementos químicos en metales y no metales. Pero al definir lo que entendemos por metal (elemento que posee en la capa más externa de 29

 la corteza un número pequeño de electrones, de los que puede desprenderse fácilmente, dando lugar a lones positivos; presenta gran conductividad eléctrica y calórica, etc.), es evidente que unos elementos poseen esas características en un grado mayor que otros. Algunos elementos (como los alcalinos) son «muy metales»; otros (como los halógenos) no son nada metales; los demás ocupan grados intermedios. El mismo estaño se comporta en una de sus formas como.metal, y en otra, como no metal. Por ello, podríamos tratar de reformular nuestra noción de metalidad como concepto comparativo, explicitando criterios que nos sirviesen para decidir, de dos elementos cualesquiera, si coinciden respecto a metalidad o si uno es más metálico que el otro. Y hemos visto como, además del concepto métrico de masa, . hay un concepto (previo) comparativo de masa. El punto a retener es que el ser clasificatorio, comparativo o métrico, como el ser cualitativo o cuantitativo, no son propiedades de las cosas, sino de los conceptos que empleamos para pensar en las cosas y hablar de ellas. Señalamos, finalmente, que si bien no siempre es fácil (ni posible) pasar de un sistema clasificatorio a otro comparativo, la inversa (es decir, pasar de un concepto comparativo a una clasificación) siempre es posible, fácil e incluso trivial. En efecto, sea un concepto comparativo sobre un dominio D, La relación de coincidencia — (que, como sabemos, es una relación de equivalencia) determina entonces unfvocamente una partición o clasificación de D, a saber, D/—, es decir, el conjunto cociente de D respecto a —. Esta partición, además de soler ser de gran finura, tiene la ventaja de estar (irreflexivamente) ordenada por la relación

 En] a característicos de los estadios más avanzados de la ciencia. Piénsese que la revolución científica del siglo XVI! consistió en gran parte en la introducción y uso sistemático de los conceptos métricos en la física, que durante los dos mil años anteriores había estado basada en los conceptos cualitativos, Los conceptos métricos asignan números reales O vectores O tensores a objetos o sucesos. Los conceptos métricos —como 454.0 tiempo— que asignan números reales a determinados objetos o sucesos se llaman magnitudes escalares. Los conceptos métricos -—como fuerza o velocidad— que asignan vectores se llaman magnitudes vectoriales. Los conceptos métricos —como curvatura— que asignan tensores se llaman magnitudes temsoriales. Para simplificar nuestro tratamiento, vamos a Íimitarnos aquí a hablar de las magnitudes escalares, aunque mutatis mutanais lo mismo podría ser dicho de las vectoriales o de las tensoriales, Cuando en lo sucesivo hablemos de concepto métrico, queremos decir concepto métrico escalar. En una primera aproximación podemos decir que un concepto métrico fen un dominio Á es simplemente f': A —> |K, es decir, una aplicación del dominio Á sobre el conjunto de los números reales, o, con otras palabras, una asignación de un número real a cada uno de los objetos de 4. Así, el concepto métrico de masa asigna un número real a cada cuerpo, el de longitud asigna un número real a cada dos señales en una superficie plana de un cuerpo o a cada dos cuerpos, el de tjempo asigna un número real a cada dos sucesos, el de frecuencia asigna un número real a cada onda, el de resistencia asigna un número real a cada conductor eléctrico, el de indice cefáhico asigna un número real a cada cabeza, el de producto nacional bruto asigna un número real a cada economía nacional y año, el de tasa de natalidad asigna un número real a cada población y año, etc. En una segunda aproximación podemos observar que con frecuencia tratamos de introducir un concepto métrico en un ámbito en el que ya disponemos de un concepto comparativo. La metrización de un ámbito o de una característica consiste precisamente en la introducción de un concepto métrico en ese ámbito o para esa característica. (No hay que confundir metrización y medida. La 31

medida supone que ya disponemos de un concepto métrico y consiste en la búsqueda del número real o vector que ese concepto métrico asigna a un objeto o suceso determinado.) Muchas veces de lo que se trata es de metrizar un ámbito ya previamente ordenado, es decir, se trata de metrizar un sistema comparativo o, dicho todavía con otras palabras, se trata de introducir un concepto métrico para algo para lo que ya disponemos de un concepto comparativo. Si (A, —, < > es un sistema comparativo que pretendemos metrizar mediante la función f': 4—> KR, lo primero que debemos exigir es que f conserve el orden establecido por (—, y el sistena numérico (IR, =, < >, donde (R es el conjunto de los números reales y =, < son la identidad y la relación «menor que» entre números reales. | Esta representación de un sistema empírico en otro numérico constituye la esencia del concepto métrico. En una tercera aproximación, podemos decir que un concepto métrico f' es un homomorfismo de un sistema empírico en un sistema numérico homólo32

A — go. Un sistema está constituido por un dominio de individuos y una serie de relaciones y funciones en ese dominio. Dos sistemas son homólogos si tienen el mismo número de relaciones y de funciones y si los números arios se corresponden (es decir, si la primera relación de un sistema es binaria, también lo es la del otro, etc.). Sean ACA R ¿Ro gy REXRS SA... hos dos sisternas homólogos. Decimos que f es un homomorfismo de. 4 en £R si y solo si ocurren las siguientes tres cosas: (1) Fes una función que a cada objeto de A asigna un número real, es decir, f: A-—>kKR. (2) Siempre que los objetos a, ... 4, de A están entre sí en la relación R, los correspondientes números reales fía) ... Fla) están también entre sí en la correspondiente relación 5. (3) Siempre que la función g, de sl asigna a n objetos a, ... a, de Aotro objeto a, . de A, la correspondiente función h, de R asigna a los correspondientes números reales Kía,) ... Aa) el correspondiente número real Fa .). Con esto queda precisado lo que entendemos por concepto métrico: un concepto métrico es un homomorfismo de un sistema empírico en un sistema numérico, El análisis estructural de la metrización de un sistema empírico suele constar de cuatro pasos: (1) Definición del sistema empírico. (2) Formulación de axiomas o hipótesis que expresan ciertas características cualitativas de ese sistema empírico. (3) Prueba de un teorema de represertración, que afirma la existencia de un homomorfismo de ese sistema empírico en cierto sistema numérico. (4) Prueba de un teorema de unicidad, que indica hasta qué punto el homomorfismo es unívoco, es decir, cuáles son las transformaciones (llamadas permisibles) del homomorfismo dado, que también constituyen homoformismos del mismo sistema empírico en el mismo sistema numérico. Aquí no vamos a desarrollar este análisis *, sino que nos limitaremos a distinguir y ejemplificar algunos de los principales tipos de conceptos métricos. 6 El lector interesado en el análisis de los conceptos métricos como homomorfismos que consrituye una de las áreas más activas de la actual filosofía de la ciencia-———- puede leer el capítulo 2 de este libro, «Los conceptos métricos», así corno acudir a las obras señaladas en «Referencias y lecturas suplementarias», al final del libro. 33

o... CONCEPTOS Y TEORÍAS EN LA CIENCIA A veces se identifica el concepto métrico con una escala, pero otras veces se identifica una escala con un homomorfismo concreto de un sistema empírico en un sistema numérico, y el concepto métrico con la clase de todos los hormomorfismos del primer sistema en el segundo. Así, para un concepto métrico dado, varias transformaciones de escalas serían permisibles. Y el hecho de que un mismo concepto métrico pueda expresarse en varias escalas corresponde evidentemente a la práctica científica. Escalas ordinales Las escalas ordinales son las más pobres desde el punto de vista de la información que nos suministran. De hecho, su rendimiento teórico no es mayor que el de los conceptos comparativos. Se limitan a asignar números, conservando el orden de un sistema comparativo dado. La escala de Richter para la intensidad de los terremotos, la de Beaufort para la de los vientos y la de Mohs para la dureza de los minerales son típicos ejemplos de escalas ordinales. Consideremos la última de las citadas. Como ya vimos anteriormente, en mineralogía se dispone de un concepto comparativo de dureza basado en el test del rayado. Siempre que asignemos números a los minerales de tal manera que a dos minerales les corresponda el mismo número o a uno de ellos un número menor que el otro según que coincidan en cuanto a dureza o el uno sea menos duro que el otro conforme al test del rayado, tendremos una escala ordinal de dureza, El minerólogo alemán Friedrich Mohs en 1822 decidió asignar números a algunos minerales, estableciendo así la «escala de Mohs». En concreto asignó el 1 al talco, el 2 al yeso, el 3 a la calcita, el 4 a la fluorita, el 5 al apatito, el 6 a la ortosa, el 7 al cuarzo, el 8 al topacio, el 9 al corindón y el 10 al diamante. Si un mineral por el test del rayado resulta ser, por ejemplo, más duro que el cuarzo y más blando que el topacio, se le asigna un número intermedio entre el 7 y 8, como el 7,5. 34

_LA ESTRUCTURA DE LOS CONCEPTOS CIENTÍFICOS A a a a AAA DA II A A A a A A A A A A NA Sea M el conjunto de los minerales. Sean — y < las relaciones de coincidencia respecto a dureza y de menor dureza según el test del rayado. La escala de Mohs es un homomorfismo f del sistema empírico en el sistema numérico (R, =, < >, tal que fítalco) = 1, fíyeso) = 2, fícalcita) = 3, Afluorita) = 4, etcétera. La escala de Moks se limita a expresar numéricamente el hecho de que un mineral es más o menos duro que otro, pero no nos dice cuánto más o menos duro es que el otro. No mide diferencias de dureza. Esta limitación es común a todas las escalas ordinales. Precisamente por ello, son muchas las transformaciones permisibles, es decir, las transformaciones del homomorfismo dado que dan lugar a homomorfismos del mismo tipo. Sean f y f dos funciones que asignan números reales a los elementos de un dominio 4. Decimos que h es una tramsformación monótona de f si para cada dos elementos x y z de A ocurre que si fx) < fíz), entonces Mx) < Hz), y que si Mx) = AD, entonces h(x) = b(2). Pues bien, si Fes un homomorfismo de un sistema empírico en un sistema numérico y constituye una escala ordinal, cualquier transformación monótona de f será también un homomorfismo del mismo sistema empírico en el mismo sistema numérico y, por tanto, será igualmente una escala ordinal. Si en vez de asignar 1 al talco, 2 al yeso, 3 a la calcita, 4 a la fluorita, etc., como hacía Mohs, asignamos 0 al talco, 500 al yeso, 500,5 a la calcita, 507 a la fluorita, etc., esa asignación sigue siendo una escala ordinal de dureza. Precisamente esta indeterminación es la que impide que pueda haber una fórmula general para pasar de una escala ordinal a otra (correspondiente al mismo concepto). Escatas proporcionales Las escalas proporcionales son las más ricas desde el punto de vista de la información que suministran. No sólo nos dicen que un obje5

mm 0 ..... CONCEPTOS Y TEORÍAS EN LA CIENCIA 220 to es más o menos que otros respecto a alguna característica, sino que nos señalan en qué proporción exacta el uno es más o menos eso que el otro. Las escalas correspondientes a los conceptos básicos de la física, como masa, longitud o tiempo, son escalas proporcionales, que, además, constituyen magnitudes aditivas o extensivas, por disponer en sus correspondientes sistemas empíricos de una operación correspondiente a la adición. Ya habíamos aludido al concepto comparativo de masa, basado en el test de la balanza y aplicable al dominio de los objetos físicos manejables. Consideremos ahora la operación empírica consistente en colocar dos objetos juntos (que por convención dan lugar a un nuevo objeto) en el mismo platillo de la balanza, y designemos esta operación mediante el signo 1, Sea (4, —, R, tal que para cualesquiera x y z de 4: (1) sí x-z, entonces fía) = Az), (2) si x < z, entonces Mx) < fa) y (3) Axl z = 0 Az. | Hay muchas funciones que cumplen esas condiciones, muchas escalas. ¿Cómo fijar una? Eligiendo un objeto cualquiera de Á y asignándole convencionalmente un número cualquiera. Ást, en la escala métrica decimal se elige un determinado cilindro de platino e iridio (el «kilo patrón») que se conserva en el museo de pesas y medidas de Sévres y se le asigna el número 1,000. Con esto queda fijada la escala de masa en gramos. A diferencia de lo que pasaba con las escalas ordinales, no todas las transformaciones monótonas de escalas proporcionales dan lugar a escalas proporcionales. Supongamos que un frasco destapado tiene 200 gramos de masa, y su tapa, 100 gramos. Por tanto, el frasco tapado tendrá 300 gramos de masa. Una transformación monótona h de la escala métrica decimal en gramos mm podría asig36

_— Q > r—_—_—m———— 0 A A A A nar al frasco el número 2, a su tapa, el 1, y al frasco tapado, el 9. Pero esa función no sería un homomorfismo de KR es una transformación similar de fsi y solo sí hay un número positivo fijo k tal que para cada objeto x de A ocurre que Mx) = £ - fx), es decir, ha) es siempre el producto de A) por un número positivo fijo. Pues bien, un homomorfismo f de un sistema empírico en un sistema numérico constituye una escala proporcional sí y sólo si cualquier transformación similar de f es también un homomorfismo del mismo sistema empírico en el mismo sistema numérico. | De aquí se sigue que para pasar de una escala proporcional a otra basta siempre con multiplicar por un número fijo. Así, para pasar de una escala en kilos a otra en gramos basta con multiplicar por 1.000; para pasar de una escala en libras a otra en kilos basta con multiplicar por 0,453, etc. Para citar otro ejemplo de escalas proporcionales, consideremos el concepto métrico de longitud, Sea

CONCEPTOS Y TEORÍAS EN LA CIENCIA AAA AA a KA A KA KB KK A AAA A ñáKÁA_ A áAÁAÁA A A € A A A A rico 'R que constituyen homomorfismos de (B, —, en CR, =, < +), para fijar una hemos de elegir un objeto de B y asignarle un número determinado. Así, en la escala métrica decimal se eligió (en 1889) una barra de platino-iridio conservada en el museo de pesas y medidas de Sévres y se le asignó el número 1. Como en el caso de la masa, y puesto que aquí también nos las habemos con escalas proporcionales, con la longitud ocurre que no toda transformación monótona, sino sólo toda transformación similar conduce de una escala de longitud a otra. Por ello, para pasar de una escala de longitud a otra basta con multiplicar por un número fijo. Así, para pasar de una escala en millas a otra en : metros, basta con multiplicar por 1.609; para pasar de una distancia en metros a otra en centímetros, basta con multiplicar por 100, etc. Téngase en cuenta que aquí hemos introducido la longitud sólo respecto a barras metálicas (o la masa respecto a objetos manejables). Esto no es sino el primer paso para luego ir extendiendo estos conceptos mediante leyes científicas a ámbitos más amplios, o, si se prefiere, éstos no son sino los primeros de una sucesión de conceptos métricos de masa y longitud de alcance creciente. “Téngase también en cuenta que nos hemos limitado a señalar las condiciones formales de adecuación de los conceptos métricos (resumidas en la exigencia de que constituyan homomorfismos de sistemas empíricos en sistemas numéricos), dejando de lado las condiciones materiales de adecuación, que, por ejemplo, en la física han llevado a una constante revisión de los objetos patrones o estándar que sirven para fijar las escalas. Así, y puesto que acabamos de hablar del concepto de longitud, podemos recordar cómo la comunidad de los físicos ha ido pasando de una escala de longitud basada en la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre que pasa por Dunkerque y Barcelona (1799) a otra basada en la barra del museo de Sévres (1889), a otra (1960) basada en la longitud de onda de la radiación emitida por el isótopo kriptón-86 excitado a la temperatura del triple punto del nitrógeno (-210%C) y a otra (1983) ba38

_..LA ESTRUCTURA DE LOS CONCEPTOS CIENTÍFICOS

yEREAAAA AS sada en el trayecto recorrido por la luz en el vacío durante 1/299792458 segundos. Magnitudes extensivas e intensivas Hemos visto que los conceptos de masa o de longitud son (clases de) homomorfismos de un sistema empírico que contiene una operación binaria de combinación de objetos (la colocación de dos objetos juntos en la balanza, la concatenación de barras una a continuación de otra) en un sistema numérico que contiene la adición. Las magnitudes de este tipo se llaman magnitudes adítivas o extensivas. Lo esencial de una magnitud aditiva festriba en la correspondencia entre la operación binaria de combinación y la adición. Si a la primera la designamos por .L, siempre ocurre que para cada dos individuos xy zdel dominio: fal y = 100 +) Así, la masa de un objeto compuesto de dos partes.es igual a la suma de las masas de sus partes. La longitud del objeto resultante de colocar dos objetos en línea recta uno a continuación de'otro es igual a la suma de sus longitudes. Esto no sólo ocurre con la masa o la longitud. Lo mismo ocurre con el tiempo (si un proceso se divide en dos partes tales que la segunda se inicia al acabarse la primera, la duración del proceso global es igual a la suma de las dura-. ciones de sus partes). El tiempo es también una magnitud aditiva o extensiva. A Es necesario explicitar exactamente las operaciones del sistema empírico para poder determinar si un concepto métrico que lo represente sobre un sistema numérico es una magnitud aditiva o no. Consideremos el caso de la resistencia eléctrica. Como es bien sabido, en un circuito podremos colocar varias «resistencias», es decir, varios conductores, en serie o en paralelo. Sea Cel conjunto de los conductores eléctricos, sea /M la relación en que 39

A A A A nx _E_—_———_ 5 A ——_—_—_ A A a A ——— — está un conductor con otro cuando el primero ofrece menor o igual resistencia a la corriente eléctrica que el segundo y sea 1 la operación de colocar conductores en serie. El concepto métrico de resistencia es una magnitud aditiva, pues sus escalas son homomorfismos de en

A A A AA AA XX 2. _—____ KA NN [NN A O 5 + mente introducidas. Así, podemos introducir el concepto métrico de densidad mediante la definición: masa de x densidad de x = volumen de x suponiendo que ya disponemos de los conceptos de masa y volumen. Igualmente podemos introducir el concepto métrico de renta per cápita mediante la definición: pls producto nacional de x renta per cápita de 10 0 coin —— | población de x suponiendo que previamente hayamos introducido los conceptos de producto nacional y población. Cuando introducimos un concepto métrico en función de otros previamente introducidos, decimos que se trata de una metrización derivada. La mayoría de las metrizaciones son derivadas. Por ejemplo, la introducción del concepto métrico de velocidad como derivada de la posición r de aceleración como derivada de la velocidad constituye una metrización derivada. De todos modos, y aunque la mayoría de las magnitudes se introduzcan en función de otras, este procedimiento no puede seguirse con todas. Con alguno o con algunos conceptos métricos hay que empezar, alguna o algunas magnitudes han de ser introdu-. cidas sin presuponer la previa introducción de otras. En estos pocos pero importantes casos hablamos de metrización fundamental. La introducción del concepto métrico de masa de que antes habíamos hablado constituye una metrización fundamental, pues no presuponía ninguna otra magnitud previa. Los conceptos introducidos por metrización fundamental suelen referirse a ámbitos relativamente limitados. El concepto métrico de masa introducido fundamentalmente sólo era aplicable a los 41

objetos físicos manejables. Pero no sólo queremos hablar de la masa de esos objetos. "También queremos hablar de la masa de los átomos o de las estrellas, que no son manejables ni pueden colocarse en los platillos de una balanza. A este concepto generalizado de masa llegamos a través de una serie de hipótesis y teorías, de las que se desprende que el primer concepto de masa está correlacionado universalmente con otros conceptos de más amplio alcance, en función de los cuales podemos definir luego un nuevo concepto métrico de masa de más universal aplicabilidad". En la génesis de muchos conceptos métricos importantes observamos esos dos momentos: la precisión de la idea intuitiva para un ámbito restringido y la posterior ampliación de su alcance, redefiniéndolo en función de los nuevos conocimientos logrados. Ventajas de los conceptos métricos Las ventajas de los conceptos métricos respecto a los clasificatorios o comparativos son evidentes. El vocabulario científico resulta mucho más simple, claro y manejable. Con un solo concepto métrico tenemos infinitas posibles situaciones ya descritas y ordenadas, sin esfuerzo alguno de memoria. Si pretendiésemos sustítuir un concepto métrico como el de temperatura por una serie de conceptos clasificatorios (gélido, frío, fresco, tibio, etc.), no sólo descendería considerablemente el nivel de precisión de nuestro lenguaje, sino que cargaríamos nuestra memoria con gran cantidad de términos distintos (y con su orden relativo). 7 Hablando con más precisión, podemos decir que el concepto generalizado de masa es el término (al menos provisional) de una sucesión de conceptos métricos de masa distintos y de amplitud creciente, que tienen en común el corresponder a un mismo conceptor (en este caso, al de masa) de una misma teoría abstracta (pos ejemplo, de la mecánica clásica, o de ia relativista reseringida, erc.), estando integrados esos distintos conceptos de masa en otros tantos sistemas físicos distintos y de creciente amplitud, que tienen en común el ser todos ellos modelos de la teoría abstracta en cuestión, Para las nociones de conceptor y teoría abstracta, véanse los capítulos 8, 10, 11 y 12. 42

A A A A AA A AAA A A 7 Los conceptos métricos no sólo permiten formular leyes científicas mucho más sencillas y precisas que las formulables con términos cualitativos, sino que incluso tienen la ventaja heurística de facilitar la búsqueda de esas leyes. En efecto, si sospechamos una correlación entre dos magnitudes f y h, podemos medir los valores de fy £ para diversos objetos o sucesos y, mediante un eje de coordenadas en el que los valores de fy de / estén marcados en los ejes de ordenadas y abscisas, respectivamente, señalar en el plano los puntos (f(x), 2x7) Ax) bl)» Gx), Ax) >, etc. Á continuación podemos trazar la curva más sencilla que pase por esos puntos y considerar la fórmula analítica que describa esa curva como hipótesis. Posteriores mediciones confirmarán esa fórmula, o bien nos obligarán a trazar una curva más complicada, reformulando entonces la hipótesis, etc. De este modo se llega en algunos casos a la formulación de leyes científicas interesantes. La razón profunda de todas las ventajas que se pueden aducir estriba en que los conceptos métricos constituyen un puente entre el mundo real y el mundo ideal de la matemática. El mundo real de la naturaleza y la sociedad es un mundo en gran parte opaco a nuestra inteligencia, lleno de oscuros recovecos, siempre sorprendente, huidizo y poco manipulable intelectualmente. El mundo de la matemática, por el contrario, es un mundo transparente, un mundo abierto a nuestra inteligencia, que lo ha creado y que lo abarca y manipula sin sorpresas, es un mundo perfectamente estructurado y ordenado, en el que nos movemos con toda facilidad. Por eso, en cuanto los problemas que se plantean en el mundo real resultan demasiado complicados e inabarcables, la mejor estrategia para su solución suele consistir en representarlos como problemas relativos al mundo de la matemática, como problemas matemáticos, para los que ya sabemos cómo hallar una solución, solución que luego podemos retraducir al mundo real. Los conceptos métricos llevan a cabo esa representación del mundo real en el mundo de los números y nos permiten esa transposición de nuestras preguntas y de nuestros problemas sobre el mundo natural o social al mundo de la matemática, donde pode43

 NIE mos usar todo el arsenal del cálculo diferencial e integral, del cálculo vectorial o tensorial, de la teoría de la probabilidad o la programación lineal, erc., para su solución y respuesta. Ésta es la razón de que en general elijamos sistemas con el conjunto KR de los números reales como sistemas numéricos en los que representar nuestros problemas. Aunque para realizar todas las medidas posibles e imaginables bastaría con los números racionales, la elección del conjunto de los números reales nos permite el uso de una artillería matemática más potente (como derivadas, integrales, ecuaciones diferenciales, etc.) para la resolución de nuestros problemas. Es de esperar que una mejor comprensión de la estructura de la conceptualización científica no sólo sirva para subrayar una vez más, y por debajo de la confusa proliferación de las distintas especialidades, la profunda unidad de la empresa científica, sino que, además, contribuya a facilitar la introducción de nuevos y más precisos y fecundos conceptos en las áreas hasta ahora menos desarrolladas de la ciencia. 44

CAPÍTULO 2 LOS CONCEPTOS MÉTRICOS Así como no se puede dibujar sin líneas, ni se puede pintar sin colores, tampoco se puede hablar ni pensar sin conceptos. Esto vale tanto para la vida cotidiana como para la actividad científica. De hecho, muchos de los conceptos científicos actuales provienen de conceptos cotidianos, aunque durante el viaje se hayan transformado, ganando sobre todo en precisión. Así, las nociones químicas de hierro (átomo con 26 protones en su núcleo) o de agua (4,0) precisan nociones previas del lenguaje ordinario. Lo Mismo ocurre con los conceptos métricos o magnitudes (conceptos que aplican números a cosas) tales como la edad, la energía o la distancia, Aquí vamos a tratar de los conceptos métricos, que hacen de puente entre el mundo empírico real y el mundo ideal de las matemáticas, permitiéndonos así construir modelos matemáticos de la realidad. ¿Cómo pasar de los sistemas cualitativos a los numéricos, como introducir las magnitudes? Ésta es la pregunta a la que tratamos de responder. La mayor parte de los ejemplos aquí dá proceden de la fístca, pero no de la física más actual, que es excesivamente complicada para una presentación elemental como ésta, sino de la física clásica más sencilla y primaria. La problemática lógica y filosófica es la misma, pero las posibilidades de comprensión por parte del no 45

especialista son mucho mayores. Las dos grandes teorías de la física actual son la mecánica cuántica, sobre todo en su forma de teoría cuántica de campos, y la teoría general de la relatividad. Las nociones de la primera se definen como operadores y otras entidades matemáticas sobre un espacio de Hilbert (un cierto espacio vectorial complejo infinitodimensional). Las de la segunda se definen en un espaciotiempo, que es una variedad diferencial provista de una métrica (un campo tensoríal que aplica un tensor covariante simétrico de orden 2 a cada punto de la variedad). Aquí, sin embargo, nos limitaremos a considerar la estructura de las magnitudes más sencillas y fundamentales de la ciencia clásica elemental, e incluso éstas no en toda su amplitud, sino sólo en sus estadios iniciales, cuando la matematización empieza a despegar de las observaciones cualitativas efectuadas en el laboratorio. Medida y metrización Metrizar un ámbito cualitativo consiste en representarlo numéricamente. Esta representación numérica toma la forma de una escala. Una escala es un homomorfismo de un sistema cualitativo empírico en un sistema numérico. Un concepto métrico o Magnitud es un conjunto de escalas del mismo tipo (transtormables unas en otras mediante transformaciones permisibles) del mismo sistema empírico en el mismo sistema matemático. Aunque hay otros tipos de sistemas empíricos sobre los que se pueden definir otros tipos de escala, aquí nos limitaremos a considerar las escalas ordinales sobre sistemas comparativos, las escalas proporcionales sobre sistemas extensivos y las escalas de intervalos sobre sistemas de diferencias. Y aunque también hay conceptos métricos no escalares (por ejemplo, los vectoriales), aquí nos limitamos a considerar los escalares (que asignan números reales a los objetos del sistema empírico). Hay que distinguir claramente los problemas de medición de los de metrización. Cuando ya disponemos de un concepto métri46

LoS CONCEPTOS MÉTRICOS co para un ámbito determinado, y de lo que se trata es de averiguar cuál es el valor (el número) que (una escala de) ese concepto asigna a un objeto determinado del dominio, nos encontramos ante una tarea de medida. Cuando, por el contrario, carecemos de un concepto métrico para un ámbito que de momento sólo nos es dado cualitativamente, y de lo que se trata es de introducir por primera vez un concepto métrico que lo cuantifique, nos encontramos ante un problema de metrización. Metrizar es introducir un concepto métrico donde no lo había, Es una tarea importante, pero que sólo en raras ocasiones es preciso llevar a cabo, Medir es hallar el valor que la función métrica asigna a un objeto. En todos los laboratorios del mundo se realizan constantemente medidas (a veces millones de medidas cada día). Es el trabajo cotidiaño de la ciencia experimental. Dentro de la metrización, se distingue la fundamental de la derivada. En general, cuando introducimos un concepto métrico, lo hacemos sencillamente definiéndolo en función de otros conceptos métricos previamente definidos. Así, por ejemplo, definimos la densidad 4 como la masa »m partida por el volumen Y: d(x) = mix)/ Wo). Con ello la densidad queda definida, pero sólo a condición de que previamente ya sepamos qué es la masa y el volumen. Se trata de una metrización derivada. Naturalmente, no podemos introducir todos los conceptos métricos de un modo derivado. Algunos deberán ser definidos o introducidos de un modo directo, primitivo o fundamental: (al menos al principio, y aunque luego experimenten extensiones de su ámbito de aplicación en función de complejas interrelaciones teóricas). Sistemas comparativos Algunas cuestiones exigen una respuesta binaria, de sí o no. Por ejemplo, si un átomo determinado es carbono, si un mamífero determinado es macho o hembra, si un número natural es primo o 47

no. Otras cuestiones más bien se resisten a ese tipo de tratamiento. Si nos interesa la altura de las personas, podríamos calificarlas —con el lenguaje ordinario— en altas y bajas. Pero esa clasificación no nos lleva muy lejos. Ya el mismo lenguaje ordinario nos invita a ir más allá, estableciendo comparaciones de altura mediante el llamado grado comparativo de los adjetivos. Áunque Fulano y Mengano sean ambos altos (o ambos bajos), lo que nos interesa es saber si Fulano es más o menos alto que Mengano. El concepto de ser más bajo (o más alto) es un concepto comparattvo. Otros conceptos comparativos son el de ser más duro (entre minerales), el de ser más antiguo (entre estratos geológicos) o el de ser más rápido (entre corredores). | Un concepto clasificatorio de altura nos dice que tanto x como y son altos, por lo que no resulta muy informativo. Un concepto comparativo de altura nos dice que x es más alto que %, lo que ya nos informa más, pero no nos dice cuánto más alto es x que y (si x es sólo un poquitín más alto que y, o si x es el doble de alto que y...). Un concepto métrico, finalmente, nos dice cuál es la altura de x, cuál es la de y y qué diferencia exacta hay entre ambas. Es el concepto más informativo. De todos modos, el pasar por un concepto comparativo es con frecuencia una etapa necesaria para llegar a disponer de un concepto métrico. Introducir un concepto comparativo en un dominio Á requiere especificar una relación de equivalencia — y una relación de orden débil

Los CONCEPTOS MÉTRICOS A A A A A A o o A A A A A

En general, es un sistema comparativo si y solo si —y < son relaciones binarias en Á tales que para cualesquiera x, y, 2 E A (ll) AAA (2) ATINA O EMANAN (4) A RS (5) =

AI A A e A NN A A A A 5 1 NO 1 a cl 1 IIA Una función es una transformación monótona de otra si ambas crecen juntas. Es decir, la función hes una transformación monótona de la función fsi y solo si para cada x, y€ A: Mx) < AN = Ho < Ay. Las escalas más débiles son las ordinales. Una escala ordinal es una función que se limita a asignar números a los objetos del sistema empírico, de tal manera que, si un objeto precede a otro respecto a la propiedad de que se trate, se le asigne al primero un número menor que al segundo, y si coinciden, se les asigne el mismo número. No hay pretensión alguna de expresar cuantitativamente las diferencias o las proporciones. La escala de Mohs para la dureza de los minerales es un ejemplo de escala ordinal. Una escala ordinal sobre el sistema comparativo LA, 7, < > es un homomorfismo de XA, —, < >en , es decir, una función f: Á-—>|R, tal que para cada x, y€ 4: x= y>f= 0) xfO0) es un sistema comparativo, entonces hay al menos una escala ordinal sobre) es un sistema comparativo, fes una escala ordinal sobre y hes una transformación monótona de $ entonces h£ es también una escala ordinal sobre LA, —, < >. SISTEMAS EXLEnSIDVOS La estructura de un sistema comparativo es demasiado débil para determinar una función que nos permita no sólo constatar que un objeto es mayor que otro (respecto a cierta propiedad), sino también medir exactamente en qué proporción el primer objeto es mayor que el segundo, en cuánto lo supera. Para ello necesitamos enriquecer la estructura del sistema comparativo, añadiéndole una nueva operación empírica L de combinación o concatenación de 50

LOS CONCEPTOS MÉTRICOS AAA An IS E A A O a A objetos. Dados dos objetos x, y del dominio, siempre ha de ser posible combinarlos de tal modo que su combinación, x L y, sea considerada como un nuevo objeto. Además queremos que esa operación de combinación corresponda de alguna manera a la adición de números. La operación de verter el contenido de dos botellas iguales en un tercer recipiente es «aditiva» respecto a volumen o masa, pero no lo es respecto a temperatura. El volumen y la masa del líquido contenido en el recipiente final es el doble que el volumen o la masa del líquido en una de las botellas, pero la temperatura resultante no es el doble de la temperatura previa, sino la misma temperatura. Sólo las operaciones del primer tipo conducen a sistemas extensivos, que, a su vez, nos permiten luego definir sobre ellos magnitudes aditivas. Un sistema extensivo es la expansión de un sistema comparativo mediante la introducción de una operación binaria | de combinación o concatenación de dos objetos cualesquiera de A para formar otro objeto de A. Esta operación 1 debe ser asociativa, conmutativa respecto a --, monótona respecto a (UD) (12 + x = nmx.L En general, es un sistema comparativo (1). lla 2) xly = yLx (3) x

Escalas proporcionales Las escalas proporcionales son las más informativas. Asignan números a los objetos de un sistema extensivo de tal modo que la función resultante no sólo conserva el orden del sistema empírico, sino también traduce adecuadamente la operación empírica de combinación de objetos como una adición de números. Toda escala proporcional es una escala ordinal, pero no a la inversa. Una transformación similar de una función es otra función que resulta de multiplicar cada valor de la primera por un número positivo. Es decir, /4 es una transformación similar de fsi y sólo si hay un £e€ |R", tal que para cada x€ 4: Mx) = + f(0). Toda transformación similar es monótona, pero no a la inversa, Una escala proporcional sobre un sistema extensivo (A, —, en fl0 es un sistema extensivo, entonces hay al menos una escala proporcional sobre E E PO Teorema de unicidad: Si (4, —,

A Una vez efectuada esa elección por nuestra parte, las propiedades del sistema extensivo determinan univocamente los valores de la escala proporcional para el resto de los objetos, de tal modo que se preserva el orden y la operación resulta aditiva. Las diversas escalas sobre el mismo sistema extensivo se basan en la elección de objetos no equivalentes como patrón o en la asignación de números distintos al mismo patrón. En cualquier caso, cada una de esas escalas es una transformación similar de cualquier otra de ellas. El sistema extensivo de masa Aquí vamos a considerar someramente la metrización fundamental de los tres conceptos básicos de la mecánica: los de masa, longitud y tiempo. Cuando sostenemos dos objetos (por ejemplo, dos libros), uno en cada mano, con frecuencia tenemos la impresión subjetiva de que uno de ellos es más pesado que el otro. Puesto que en la superficie terrestre la aceleración gravitatoria es constante, el peso de los objetos es proporcional a su masa. Un libro nos parece más pesado que el otro porque es más pesado que el otro. Y es más pesado porque tiene más masa. Otras veces nos parece que ambos libros coinciden en cuanto a masa. Algunos japoneses afirman que el resultado de un combate de sumo está casi siempre determinado por la masa de los contendientes, El más masivo es el que gana. Para comprobar esta hipótesis tenemos que disponer de un procedimiento que nos permita comparar sus masas respectivas. Desde tiempo inmemorial la comparación entre objetos mesoscópicos en cuanto a su masa se ha efectuado con ayuda de la balanza de brazos iguales. Supongamos que queremos introducir un concepto comparativo de masa para un dominio de objetos mesoscópicos manejables, como piedras o cilindros metálicos, y que disponemos de una balanza, en cuyos platillos podemos colocar dichos objetos sin dificultad. 53

 En primer lugar, introducimos una relación —,, de coincidencia en cuanto a masa. Por convención, todo objeto coincide en cuanto a masa consigo mismo. Dos objetos distintos coinciden en cuanto a masa si y sólo si, colocados en sendos platillos de la balanza, la equilibran. Esta relación es reflexiva, simétrica y transitiva, y, por tanto, es una relación de equivalencia. En segundo lugar, introducimos una relación

Los CONCEPTOS MÉTRICOS A A A a e A A A a El concepto métrico de masa Dado el sistema extensivo que acabamos de describir, basta con elegir uno de los objetos [o una clase de equivalencia de ellos) como unidad, estándar o patrón y asignarle un número para determinar univocamente una escala de masa, Hasta la Revolución francesa, había una enorme variedad de escalas (mal definidas, pero todas distintas entre sí) tanto para la masa (o, más bien, el peso) como para otras magnitudes, lo cual creaba todo tipo de confusiones, abusos y problemas. Los Estados Generales habían solicitado varias veces acabar con la anarquía de las unidades de medida. En 1791, y a sugerencia de Talleyrand, la Asamblea Constituyente encargó a la Académie des Sciences que diseñara un nuevo y unificado sistema de pesas y medidas. La Ácadémie nombró. un ilustre comité, presidido por Borda, del que formaban parte varios de los mejores científicos del momento, como Lagrange, Condorcet, Monge y Laplace, y que mantenía estrecho contacto con Lavoisier. La Asamblea Constituyente aprobó ese mismo año 1791 (antes de que se instaurara el Terror) las propuestas de la Académie. Talleyrand emigró a Inglaterra durante el Terror. Tras su vuelta a París, en 1798 convocó una conferencia internacional de científicos para perfeccionar el sistema métrico decimal, que en 1799 fue declarado solo sistema legal en Francia. Su actual sucesor se llama desde 1960 el sistema internacional (SD. | En 1799 los padres del sistema métrico decimal eligieron como patrón de masa la de un decímetro cúbico de agua a 4%C (temperatura de máxima densidad del agua) y, más específicamente, la de un cilindro metálico de esa masa fundido al efecto por encargo de la Académie. En 1889, este viejo cilindro fue reemplazado por otro nuevo. En efecto, la Conferencia General de Pesas y Medidas celebrada ese año proclamó como patrón de masa un cilindro (de 3,98 cm de altura y diámetro) hecho de una aleación de 90% de platino y 10% de iridio. Este cilindro, conservado bajo una triple campana de vidrio, y junto a 6 copias, en la Oficina Internacional

Ma PEA de A A A A A A A de Pesas y Medidas de Sévres, sigue siendo el estándar o patrón de masa en el SI. La masa es la única magnitud básica del SI, cuya unidad (el kilogramo) no se basa en un proceso de la naturaleza, sino en un objeto artificial convencional: el kilogramo patrón. De todos modos, el concepto métrico de masa, tal y como lo hemos Introducido aquí, sólo se aplica a objetos mesoscópicos manejables, no a átomos o estrellas, por ejemplo, que no pueden colocarse en los platillos de una balanza. A partir de este concepto de masa, y mediante una serie de ampliaciones sucesivas (en realidad, una serie de conceptos distintos de dominio o alcance creciente), se extiende su ámbito de aplicación. Estas ampliaciones son extensiones conservadoras del concepto anterior, en el sentido de que conservan los mismos valores para los objetos del ámbito previamente metrizado. La extensión dei concepto de masa en la mecánica clásica tiene lugar mediante el establecimiento de relaciones basadas en sus leyes fundamentales. Esto presentaba inicialmente un problema, pues las dos leyes relevantes (la segunda ley de Newton y la ley de la gravitación) parecían dar lugar a dos nociones distintas de masa, las llamadas masa inercial y masa gravitatoria. La masa inercial se determina [en base a la segunda ley de Newton, F = máx) - alo] a partir de la aceleración producida por una fuerza conocida: masa inerte de x = —— a(x) La masa gravitatoria, por el contrario, se determina [en base a la ley de la gravitación universal, Lo G mix) - níy!7, donde r es la distancia entre xe y] a partir de la medición de la fuerza gravitatoría ejercida por la tierra Psobre un cuerpo x: Bs ¿2 G- mL) Afortunadamente ambas masas —la inercial y la gravitatoria— son iguales, como R. Eótvós comprobó experimentalmente a prinmasa gravitatoria de x =

LOS CONCEPTOS MÉFTRICOS €álAAN A ñ _ E__—_—_—_——_— 4 A _ = = a nn. _AAA4á—áÁá4+ á42+ + A ——_—_ A A A A n_n cipios de nuestro siglo. (No era necesario que lo fueran, pero de hecho lo son.) Otra cuestión distinta, planteada y respondida afirmativamente por E. Mach dentro de su programa de reducción de la dinámica a la cinemática, es la de si sería posible definir la masa en términos puramente cinemáticos, como la longitud y el tiempo, con lo que su metrización sería derivada, no fundamental. En función de la posición (reducible a la longitud) y el tiempo se define la aceleración (como segunda derivada de la posición por el tiempo). Y en función de la aceleración trató Mach de definir la masa. Dos objetos tienen la misma masa si y sólo si, al interactuar (por ejemplo, mediante una colisión frontal), obtienen ambos la misma aceleración. Un objeto tiene una masa »m veces superior a otro si, al interactuar, el segundo adquiere una aceleración 2 veces mayor que el primero. Esta interesante propuesta de Mach ha tropezado sin embargo con dificultades. Al pasar a otras teorías no newtonianas, como la relatividad especial, la noción de masa cambia profundamente. La masa de un objeto o de una partícula ya no es invariante respecto a su velocidad, sino que depende esencialmente de ella. Se trata de un concepto muy distinto de masa, que [con buena voluntad) puede considerarse como una ampliación del concepto clásico a objetos que se mueven a velocidades próximas a la de la luz, extensión conservadora (dentro de los márgenes de medida efectiva) respecto. a los objetos a baja velocidad. El sistema extensivo de longitud En el lenguaje cotidiano decimos que unos humanes son más altos que otros, que una gasolinera está más lejos de aquí que otra, que un barco tiene mayor eslora que otro,.que una falda es más corta que otra, etc. Comparamos cosas respecto a su longitud, como más cortas o largas que otras. 57

Supongamos que queremos introducir un concepto comparativo de longitud para un dominio de barras metálicas rígidas a temperatura constante. Introducimos una relación —, de coincidencia respecto a longitud del siguiente modo: Cada barra, por convención, coincide consigo misma respecto a longitud. Dos barras distintas son equivalentes o coincidentes respecto a longitud sí y sólo si, yuxtapuestas colateralmente la una junto a la otra de tal manera que sus extremos iniciales coincidan, sus extremos finales coinciden también. Esta relación es reflexiva, simétrica y transitiva, es decir, una relación de equivalencia. Introducimos luego una relación

_LoOS CONCEPTOS MÉTRICOS El concepto métrico de longitud Dado el sistema extensivo que acabamos de describir, basta con elegir una de las barras (o una clase de equivalencia de ellas) como unidad, estándar o patrón y asignarle un número para determinar unfvocamente una escala de longitud. Esta escala de longitud puede luego ser extendida hasta abarcar otros objetos rígidos con una arista (yuxtaponible colateralmente a una barra), posiciones en el espacio, distancias, etc., todo lo cual presenta problemas que no vamos a analizar aquí. En cualquier caso, el primer pS consiste en la elección de una unidad estándar, La unidad de longitud elegida por el Comité de la Académie des Sciences en 1791 fue la diezmillonésima parte del cuadrante de un merididano terrestre. Como los meridianos podían ser diferentes, se eligió uno determinado: el que pasa por Dunkerque. Entre 1792 y 1799 se llevó a cabo la medición por tuangulación de un arco de diez grados de latitud sobre ese meridiano (el arco comprendido entre Dunkerque y Barcelona). Hoy sabemos que tuvo un error de 2 partes en 10.000. En realidad el cuadrante de ese meridiano terrestre tiene 10.002.2838,3 m, no 10.000.000 m. Esta medida tenía una precisión de casi una parte en 10%, En 1798 se fabricó el prototipo del metro, una barra de platino, depositada en los Archivos Nacionales y aprobada por la Asamblea Legislativa al año siguiente. Con la introducción de este prototipo se aumentó la precisión en un orden de magnitud, alcanzando una parte en 10%. La unidad de longitud, el metro (como la de masa, el kilogramo), no se basaría en un concepto, sino en un objeto artificial . concreto, el metro patrón. El metro era la longitud de esa barra, con independencia del meridiano. La Conferencia General de Pesas y Medidas de 1889 estableció como unidad estándar de longitud la distancia (a 09€ de temperatura) entre dos marcas sobre una nueva barra metálica de perfil en forma de «X», hecha de una aleación de 90% de platino y 10% de iridio y conservada en la Oficina de Pesas y Medidas de Seévres, Otras barras-copias eran comparadas con ella mediante un mi59

 croscopio reversible especial. Esta nueva barra estándar y los procedimientos de comparación que la acompañaban hicieron poslble incrementar la precisión por otro orden de magnitud, llegándose así a casi una parte en 10". Entre 1899 y 1960, esta barra sirvió de patrón fundamental para la medida de longitudes. En los años cincuenta todo el mundo era consciente de que ninguna barra metálica era completamente estable. Las ondas de luz coherente proporcionarían un estándar mucho más invariable, y diversas lámparas atómicas fueron ensayadas. Finalmente se eligió el kriptón, un gas noble de número atómico 36, que aparece en la naturaleza (en la atmósfera) en forma de diversos isótopos, de los cuales el más frecuente es el kriprtón-86. El espectro del kriptón se compone de 36 líneas, la mayoría amarillas o verdes, correspondientes a las transiciones de energía de los 36 electrones del átomo. La línea elegida para la definición del metro estándar es una partíicular línea (luz) de color anaranjado. En 1960, la Conferencia General de Pesas y Medidas decidió cambiar el estándar de longitud, redefiniendo el metro como una longitud igual a 1.650.763,73 veces la longitud de onda en el vacío de la radiación correspondiente a la transición entre los niveles 2p,, y 54, del isótopo kriptón-86. Con esto la precisión de la medida se multiplicaba por 100 y alcanzaba una parte en 10". El comparador de barras mediante microscopio reversible de Sévres fue sustituido por una compleja instalación que permite la comparación directa con el estándar definido en función de la radiación del kriptón-836. Además el nuevo estándar tenía la ventaja de ser reproducible en cualquier laboratorio adecuadamente equipado del mundo, sin necesidad de ir a Sévres. La lámpara de kriptón-86 permitió incrementar la precisión, pero seguía teniendo problemas, relacionados muchos de ellos con la dificultad de conseguir luz suficientemente coherente (que mantuviera su longitud de onda durante suficiente tiempo como para recorrer un metro, por ejemplo). Pronto se vio que el desarrollo de la tecnología del láser permitía conseguir una luz mucho más coherente que la de la lámpara de kriptón, y se pensó en rede60

mo LOS CONCEPTOS MÉTRICOS AA A e A AA AAA Ar finir el estándar de longitud mediante el láser. Pero no llegó a ser así, pues una solución más radical y definitiva acabó imponiéndose. Esta solución se basa en el hecho (comprobado hasta la saciedad y principio fundamental de la teoría especial de la relatividad) de que la velocidad de la luz en el vacío es una constante absoluta. Puesto que la luz en el vacío recorre siempre la misma longitud por unidad de tiempo, y puesto que la medida del tiempo había adquirido una precisión mayor que todas las demás, bastaba con definir el metro como la longitud recorrida por la luz en el vacío en una fracción determinada de segundo. En octubre de 1983 la Conferencia General de Pesas y Medidas decidió redefinir el metro, incrementando su precisión en una potencia de 10 (un orden de magnitud) y alcanzando una exactitud de una parte en 10%, A partir de entonces, el metro se define oficialmente como la longitud lo distancia) recorrida por la luz en el vacío en la fracción 1/299792458 de segundo. Con esta definición, el estándar de longitud se define en función del estándar de tiempo (el segundo). Por tanto, y en teoría, podría considerarse que la metrización de la longitud deja de ser primitiva o fundamental, para convertirse en derivada, El sistema extensivo de tiempo Así como atribuimos masa y longitud a los objetos, atribuimos duración a los procesos. Unos procesos duran más o menos que otros. Los viajes, las enfermedades y nuestra propia vida son más o menos breves. Todos tenemos una experiencia subjetiva del tiempo y la duración. El lenguaje ordinario tiene recursos (adverbios temporales, tiempos verbales, etc.) para expresar la duración. Sin embargo, la noción objetiva de tiempo y duración está necesariamente relacionada con los relojes. Cualquier proceso periódico o cíclico o repetitivo puede ser considerado como un reloj (más o menos bueno, según que su ciclo sea más o menos regular). Entre los ciclos regulares bien conocidos están las oscilaciones de los péndulos. ... 6l

CONCEPTOS Y TEORÍAS EN LA CIENCIA A a cc cl ct cl ld ls il bl dc it cd tl cl ld tb Supongamos que queremos introducir un concepto comparatlvo de tiempo para las oscilaciones de un conjunto de péndulos. Primero definimos una relación —, de coincidencia en cuanto a duración. Dos péndulos coinciden en la duración de su periodo si, puestos en marcha a la vez, alcanzan también a la vez el punto inferior de su trayectoria en cada una de sus oscilaciones. Luego definimos una relación

 e a decir, coordinables con las oscilaciones de algún péndulo, aunque sea ideal) y, finalmente, a todo tipo de procesos. El camino es escabroso, pero transitable, | Según Aristóteles, «el tiempo es la medida del movimiento, según lo anterior y lo posterior»!, Esa medida del movimiento viene dada por el número de ciclos que recorre un reloj mientras dura ese movimiento. El tiempo es lo que miden los relojes (es decir, los sistemas cíclicos estrictamente periódicos). Durante la mayor parte de la historia los únicos relojes fiables eran los astronómicos, los movimientos cíclicos aparentes del Sol y de la Luna, que correspondían a la rotación de la Tierra en torno a su eje (el día), a la translación orbital de la Luna en torno a la Tierra (el mes) y a la translación orbital de la Tierra en torno al Sol (el año). Hoy sabemos que esos relojes celestes no son perfectos, pero hay que reconocer que nos han prestado un buen servicio como aproximaciones satisfactorias. Para medir procesos más breves que un día los relojes celestes no servían (sobre todo sí el día estaba nublado). Por ello el ingenio humano ha producido una serie de relojes o sistemas cíclicos artificiales que sirviesen para medir tiempos pequeños, como las horas, los minutos o los segundos: relojes de sol, de arena, de velas, de agua o mecánicos. En Europa, hacia 1300, los mejores relojes ganaban o perdían 15 minutos por día, es decir, sólo lograban una precisión de una parte en 100. Sin embargo en China, por la misma época, una larga tradición de perfeccionamiento de los relojes de agua había conducido en algunos casos a relojes con un error de sólo medio minuto por día, es decir, una precisión 30 veces mayor que en Europa. La relojería europea experimentó un gran progreso en el siglo XVI y, tras la incorporación por Huygens de los principios galileanos del péndulo, los nuevos relojes de péndulo redujeron el error a 10 segundos por día, alcanzando así una precisión de una parte en 10%, De hecho, hasta 1950 los mejores relojes disponibles siguieron siendo los de péndulo. ' Physiké A, 219 b. 63

 Los fundadores del sistema métrico no se preocuparon de definir una nueva unidad de tiempo. En vez de ello, propusieron la unidad natural existente, el día, y se limitaron a sugerir múltiplos y submúltiplos decimales del mismo. Pero esa propuesta no prosperó. Finalmente se adoptó como unidad de tiempo el segundo, definido en función del movimiento rotacional de la Tierra como la fracción 1/86.400 (= 24-60-60) del día solar medio. Pero el día solar medio no es constante, va creciendo lentamente. Por ello en 1956 el segundo fue redefinido oficialmente en el Si en función del movimiento orbital de la Tierra alrededor del Sol, es decir, del año solar o tropical. El ecuador celeste y la eclíptica sólo se cruzan en dos puntos: los equinoccios. El centro del Sol, en su trayectoria aparente por la eclíptica, cruza el ecuador celeste dos veces al año. El tiempo comprendido entre dos cruces sucesivos por el equinoccio de primavera se llama un año tropical. Lo malo es que este año tropical también varía, se va reduciendo lentamente. Por eso, había que fijar un año determinado, y se eligió el 1900, El segundo sería la fracción 1/31556925974 del año tropical 1900. De todos modos este segundo «efemérico» así definido sólo estuvo oficialmente vigente durante 11 años. En 1967 se dio una nueva definición del segundo, que aprovechaba los avances de la ciencia y tecnología atómicas. El segundo pasó a ser definido en función de un cierto número de oscilaciones de la radiación generada por un reloj atómico basado en el comportamiento del isótopo cesio-133. El cesio es un metal alcalino de número atómico 55. Casi todo el cesio presente en la naturaleza tiene la forma de isótopo 133. Los átomos no pueden encontrarse más que en ciertos niveles de energía bien determinados. Toda transición entre dos de estos niveles se acompaña de la emisión o de la absorción de un fotón u onda electromagnética de frecuencia invariable. En la última capa del átomo de cesio hay un solo electrón. Si el spin de ese electrón tiene dirección opuesta al spin del núcleo, el átomo de cesio está en su nivel de energía más bajo posible. El nivel inmediatamente 64

LOS CONCEPTOS MÉTRICOS A e A A A A A A e AAA o A A FA A A ————————_—_—_—_—_—_—_— MÁ superior de energía se alcanza sí el spin del electrón extermo cambia de dirección y se alinea con el del núcleo. El átomo de cesio pasa del primer estado al segundo (es decir, realiza una transición entre dos niveles hiperfinos) absorbiendo la energía de una radiación electromagnética muy determinada (de 9.192.631.770 hertz, o ciclos por segundo). Si pasa del segundo estado al primero, pierde la energía previamente ganada emitiendo un fotón de la misma frecuencia. | El átomo de cesio gira en torno a su eje de rotación o spin. Colocado en un campo magnético de cierta intensidad, su eje de rotación describe un círculo (como una peonza girando en el suelo) o precesión. Esta precesión puede ser detectada y estimulada por una emisión de radio de una frecuencia de 9.192.631.770 vibraciones o ciclos por segundo, que es la que corresponde a la transición entre dos niveles hiperfinos de isótopo cesio-133, En ello se basa la (desde 1967) definición oficial de la unidad de tiempo: «El segundo es la duración de 9.192.631.770 ciclos de la radiación correspondiente a la transición entre dos niveles hiperfinos del átomo de cesio-133». ¿Cómo conseguir una radiación electromagnética de la frecuencia deseada (9.192.631.770 hertz)? Mediante un reloj de cesio, que, simplificadamente, consiste en lo siguiente: UA horno eléctrico calienta cesio-133, con lo que se produce un chorro de átomos de cesio. Un selector magnético filtra y deja pasar sólo los átomos en el nivel más bajo de energía. Éstos penetran en una cámara sometida a radiación electromagnética procedente de un oscilador de cuarzo, que pretende acercarse lo más posible a la frecuencia deseada de 9.192.631.770 hertz. La radiación de ese tipo transmite su energía a los átomos con los que interacciona, que pasan al nivel siguiente de energía. Un nuevo selector magnético elimina los átomos de nivel más bajo de energía. Finalmente, un detector cuenta los átomos que llegan hasta el final (los de energía más alta). Un servomecanismo de retroalimentación modula la producción de ondas electromagnéticas en el oscilador. Si la radiación producida es la correcta, muchos átomos realizan la transi65

y son detectados al final del proceso. Si la radiación se desvía de la correcta, entonces menos átomos son detectados al final, con lo que el detector envía al oscilador una señal que automáticamente altera su frecuencia, hasta que de nuevo se consiga que un número máximo de átomos alcance el detector. Cuando esto ocurre, ello garantiza que la radiación electromagnética producida tiene exactamente la frecuencia deseada. Esta frecuencia puede entonces ser transformada por divisores electrónicos de frecuencia en señales a intervalos exactos elegidos (por ejemplo, cada microsegundo). Estos relojes de cesio permiten una precisión superior a una parte entre 10%, que es la máxima precisión alcanzada hasta ahora en cualquier tipo de medición. Sistemas de diferencias Á veces no resulta posible introducir en un sistema comparativo una operación de combinación empírica representable aditivamente, que nos permita definir una escala proporcional. ¿Implica esa situación que tengamos que conformarnos con una mera escala ordinal? No siempre. A veces es posible establecer comparaciones entre pares de objetos (o entre diferencias entre objetos) respecto a la propiedad que nos interesa metrizar (como la temperatura o las preferencias), lo que a su vez nos permite introducir una escala de intervalos, más informativa que la meramente ordinal (aunque menos que la proporcional). En un sistema de diferencias no sólo comparamos entre sí de objetos cualesquiera del dominio respecto a si poseen más o menos la propiedad en cuestión, sino que también comparamos las diferencias entre pares de objetos respecto a esa propiedad. Si se trata de preferencias, no sólo preferimos una cosa a otra, sino que preferimos más a x sobre y que a ¿sobre 2 (es decir, estamos más dispuestos a canjear y por x que a canjear w por z). Si se trata de temperaturas cualitativas (comparadas mediante un tubo de mercurio no calibrado), no sólo podemos decir que un líquido está 66

 a menos caliente que otro (pues la columna de mercurio dentro del tubo sube menos), sino que también podemos comparar las diferencias entre dos tazas de café y entre dos vasos de agua, comprobando si el recorrido del mercurio en el tubo al pasar de una taza de café a otra es menor o mayor que al pasar de un vaso de agua a otro. Por ejemplo, podemos definir las relaciones de equivalencia y precedencia entre pares de líquidos en función de la distancia entre marcas hechas sobre el tubo de mercurio sin graduar, que indican los diversos niveles de expansión del mercurio al contacto del tubo con líquidos diversos. Un sistema de diferencias es la expansión de un sistema comparativo (con universo A) mediante la introducción de dos relaciones cualitativas binarias en AX Á, es decir, no entre objetos de A, sino entre pares de objetos de A. Una de estas relaciones, E, es una relación de equivalencia en 4 X A. La otra, D, es una relación de precedencia u orden débil en AX A. Estas relaciones deben satisfacer ciertas condiciones, que son las que aseguran que luego se pueda introducir la correspondiente escala de intervalos, En vez de (x, Y D(z ww) ví y E lz w) escribimos “(x, y) DUE(z, w), que se lee (x, y) está en la relación Do en la relación E con (z, w), es decir, la diferencia entre x e y es equivalente o menor que la diferencia entre zy w. -— La segunda condición de la definición del sistema de diferencias indica que la relación se invierte si trastocamos el orden de los pares. La tercera indica una monoticidad débil. La cuarta asegura la solubilidad de las ecuaciones. La quinta usa la noción de sucesión. estándar estrictamente acotada. Una sucesión cualquiera, A AO 4, ... de elementos de Á es una sucesión estándar estrictamente acotada de A sí y sólo si (1) las diferencias entre elementos sucesivos son equivalentes, es decir, (a,, a,) Ela, a: ,), (2) las diferencias entre elementos sucesivos no son nulas, es decir, no (4,, 4,) E (4, 4,), y (3) hay cotas en Á que acotan estrictamente la sucesión, es decir, hay 6, ce Atales que para cada a; (6, c) Día, a) D(c, 6). En general, (A, +,

(0) es un sistema comparativo (1) Ees una relación de equivalencia en AX Á Des una relación de orden débil en AX A (2) Loy DUE(: w = > (wW23 DUE x (3) ApDUZEGa Alo 9 DUEG) = > (x wm) DU E (z) (48) 3DULE AA (py DU Elw x) > Juve Á [(u, x) Ep 3 A [w, 9) Ep 3] (5) Toda sucesión estándar estrictamente acotada de Á es finita. Escalas de intervalos Una transformación lineal positiva de una función es otra función que resulta de multiplicar cada valor de la primera por un número positivo fijo y añadir al resultado otro número determinado. Es decir, h es una transformación lineal positiva de f'si y sólo si hay un KERR" y un seR, tales que para cada x€ 4: Mx) = R- (+. Toda transformación similar es lineal positiva (para s = 0), pero no a la inversa. Y toda transformación lineal positiva es monótona, pero ño a la inversa. Una escala de intervalos sobre un sistema de diferencias (donde =, < son la igualdad y la relación de precedencia entre diferencias numéricas), es decir, una función f: A—— > R, tal que para cada x, y€ A: SS = Ay) x fo0 < Ay (oy) Elo 0) = > fo - An = A2) - Av) 9) D60 = > fo-(0 < A) Teorema de representación: 91 (A, —, . 68

_Los CONCEPTOS MÉTRICOS a a A a A A Id AAA A A a a A A Teorema de unicidad: Si , y h es una transformación lineal positiva de $ entonces / es también una escala de intervalos sobre . Un sistema de diferencias no determina unívocamente una escala de intervalos más que hasta transformaciones lineales positivas. Si queremos construir una escala concreta, procedemos del siguiente modo. Elegimos dos objetos no equivalentes (o dos clases de equivalencia de objetos) del dominio y les asignamos convencionalmente dos números distintos. Esos objetos (o clases de equivalencia de objetos) y los números que les asignamos fijan la escala. Una vez efectuada esa elección por nuestra parte, las propiedades del sistema de diferencias determinan univocamente los valores de la escala de intervalos para el resto de los objetos, de tal modo que se preserva el orden y las diferencias. Las diversas escalas sobre el mismo sistema de diferencias se basan en la elección de pares de objetos no equivalentes como patrones o en la asignación de números distintos a los mismos patrones. En cualquier caso, cada una de esas escalas es una transtormación lineal positiva de cualquier otra de ellas. El concepto métrico de temperatura Las magnitudes que consisten en escalas de intervalos son magnitudes intensivas. Ejemplos típicos de magnitudes intensivas son la temperatura (en la física) y la utilidad (en la teoría económica o en la teoría de la decisión). La temperatura (métrica) es un homomorfismo del sistema de diferencias cualitativas de temperatura en un sistema matemático sobre los números reales y los pares de números reales, La utilidad es un homomorfismo del sistema de diferencias entre preferencias cualitativas y el correspondiente sistema matemático, Consideremos el caso de la temperatura. Supongamos que ya disponemos de un sistema cualitativo de diferencias (A, —, de temperatura en el dominio A de los 69

 A líquidos presentes en el laboratorio, basado en el tubo de mercurio sin graduar. Toda asignación fde números reales a los líquidos de Á que preserve las relaciones de equivalencia y precedencia entre líquidos de 4 y entre pares de (o diferencias entre) líquidos de A será una escala de temperatura. ¿Cómo fijar una escala determinada? Aquí ya no basta con elegir un solo objeto o proceso y asignarle un número (como en el caso de las magnitudes extensivas). En primer lugar, elegimos un cierto tipo de líquidos del dominio A y asignamos un número ca estos líquidos cuando se encuentran en un estado determinado y fácilmente reproducible. Luego asignamos otro número distinto a los líquidos del mismo tipo que se encuentran en otro estado determinado y fácilmente reproducible, . pero distinto del anterior. En el caso de la escala Celsius, lo que hacemos es asignar el número O al agua en el punto de fusión (el triple punto del agua, es decir, la temperatura a la cual agua líquida, hielo y vapor pueden coexistir en un recipiente cerrado) y el número 100 al agua en el punto de ebullición. En el caso de la escala Fahrenheit, a esos dos puntos les asignamos los números 32 y 212, En el caso de la escala Kelvin, los números 273,16 y 373,16. Así, el intervalo de la escala Kelvin es el mismo que el de la escala Celsius. La Conferencia Internacional de Pesas y Medidas de 1967 adoptó como unidad de temperatura del sistema internacional (SD el Kelvin, definido como «la fracción 1/273,16 de la temperatura termodinámica del triple punto del agua». Los físicos utilizan la escala Kelvia para medir las temperaturas, pues esta escala asigna el número O al estado de frío absoluto (es decir, de nulo movimiento molecular o nula energía cinética promedia de las moléculas), lo cual se corresponde bien con la noción acrual de la temperatura de un gas como la energía cinética promedia de las moléculas del gas. Sin embargo, con esta última consideración abandonamos el lenguaje de la termodinámica fenomenológica, en el que nos movíamos hasta ahora, para entrar en el de la teoría cinética de gases o mecánica estadística, que en gran parte ha venido a sustituirla. De todos modos, y con grandes dosis de buena voluntad, podemos 7O

LOS CONCEPTOS MÉTRICOS RA esperar que la nueva temperatura sea una extensión conservadora de la anterior, al menos aproximadamente. Cualquier transformación lineal positiva de una escala de intervalos es otra escala de intervalos (orro homomorfismo del mismo sistema de diferencias cualitativas en el mismo sistema numérico). Las escalas de temperatura (como la escala Celsius, la escala Fahrenheit y la escala Kelvín o absoluta) son escalas de intervalos, obtenibles unas a partir de otras mediante transformaciones lineales positivas. Así, para pasar de la escala Celsius a la escala Fahrenheit hemos de multiplicar el valor Celsius por 9/5 y añadir 32 al resultado. Es decir, T4o) = ¿ To) + 32 Á la inversa, para pasar de la escala Fahrenheit a la escala Celsius, multiplicamos el valor Fahrenheit por. 5/9 y añadimos --160/9 al resultado: Tx) =7 Ts) — Le Para pasar de la escala Celsius a la escala Kelvin, hemos de multiplicar el valor Celsius por 1 y añadir 273,16 al resultado: TL) = T (00 + 273,16 Para pasar de la escala Kelvin a la escala Celsius, multiplicamos el valor Kelvin por 1 y añadimos —273,16 al resultado: Tk) = T 40 273,16 Comparación de escalas y sistemas cualitativos Concluimos esta breve presentación de los principales tipos de conceptos métricos y escalas, resumiendo algunas de sus interrelaciones. 71

.... .. CONCEPTOS Y TEORÍAS EN LA CIENCIA A A Todo sistema comparativo permite definir escalas ordinales, que son unívocas hasta transformaciones monótonas crecientes. Todo sistema de diferencias permite definir escalas de intervalos, que son unívocas hasta transformaciones lineales positivas. “Lodo sistema extensivo permite definir escalas proporcionales, que son unívocas hasta transformaciones similares. Las escalas más informativas son las proporcionales. Todas las escalas proporcionales son automáticamente también escalas de intervalos y escalas ordinales. Las escalas de intervalos son menos informativas que las proporcionales, pero más que las meramente ordinales. "Todas las escalas de intervalos son automáticamente también escalas ordinales. Las escalas meramente ordinales son las más pobres en información y no merecen ser consideradas como magnitudes, pues su rendimiento teórico no va más allá del de los meros Conceptos Comparativos. Toda transformación similar es también una transformación lineal positiva, pero no a la inversa. Toda transformación lineal positiva es una transformación monótona creciente, pero no a la Inversa, El rol de los conceptos métricos en la ciencia La realidad que nos rodea es enormemente compleja y en gran parte resulta opaca a nuestra comprensión y manipulación intelectual. Sin embargo, el mundo ficticio de la matemática, que nosotros hemos creado, es mucho más transparente y mejor conocido. Además, disponemos de técnicas conceptuales potentísimas para resolver los problemas acerca del mundo matemático formulados en el lenguaje de las matemáticas. Afortunadamente, y desde el siglo XvH, hemos salido del marasmo en que nos había sumido el intento por comprender directamente la realidad y hemos aprendido a conquistarla por la ruta indirecta de la modelización cuantitativa. Construimos modelos matemáticos de la realidad empírica y trasladamos a esos Is

FW NA ll A A e A A A — caña E A a Ls OR AA modelos los problemas que la realidad nos plantea. Esos problemas, así traducidos al lenguaje matemático, son susceptibles de ser analizados y resueltos matemáticamente. Y la solución matemática, retraducida al lenguaje empírico, se convierte en una solución satisfactoria de nuestros iniciales problemas reales. Al menos, eso es lo que ocurre si nuestro modelo matemático es suficientemente. bueno. En cualquier caso, son los conceptos métricos los que juegan el papel clave de intermediarios en este taumatúrgico ir y venir entre realidad opaca y ficción transparente. Resulta sorprendente que ese rodeo por el mundo ficticio de la matemática nos proporcione representaciones fiables del mundo real de los procesos físicos y soluciones eficaces a nuestros problemas empíricos. Parece milagroso que algo tan extravagante funcione. Como dice Eugene Wigner, «el milagro de la adecuación del lenguaje de la matemática para la formulación de las leyes de la física es un don maravilloso que nosotros no entendemos ni merecemos» *, Quizá no lo merezcamos, pero si, a pesar de todo, tratamos de entenderlo, tendremos que seguir avanzando en nuestra comprensión de la estructura, dinámica y papel de los conceptos métricos en la empresa científica. 2 E, Wignes en «The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences», publicado en Symmetry and Reflections, p. 237. 73

CAPÍTULO 3 TAXONOMÍA FORMAL Clasificar Una de las actividades científicas más frecuentes es la que consiste en clasificar * los individuos de un ámbito determinado, de cal modo que podamos hablar, pensar y formular leyes o hipótesis sobre ellos con más facilidad. Cuando nos ponemos a clasificar un dominio de objetos, no consideramos terminada nuestra tarea hasta que la clasificación o colección de clases introducidas los abarca a todos. Esto puede precisarse diciendo que el resultado de clasificar un conjunto A ha de constituir un recubrimiento de 4, Un recubrimiento de Á es una familia de subconjuntos no vacíos de Á tal que la unión de todos ellos es idéntica a A. Formalmente, | iconos CEPARDEOANDESÁ ' Según la ya clásica definición de G. Simpson en Principles of Animal Taxonomy (Columbia University Press, Nueva York, 1961), p. 11, «taxonomía es el estudio teórico de la clasificación, incluyendo sus bases, principios, procedimientos y reglas». Aquí entendemos por taxonomía formal la parte más abstracta de la taxonomía, que se limita a considerar y explicar las estructuras formales o matemáticas implícitas en la actividad de clasificar. 753

.. . CONCEPTOS Y TEORÍAS EN LA CIENCIA Las clases que constituyen una clasificación pueden solaparse, pueden ser solapantes. Por ejemplo, la clasificación de los humanos por nacionalidades es solapante, pues hay individuos con doble nacionalidad. La clasificación de los estudiantes de una universidad por la facultad en que están matriculados puede ser solapante, pues algunos alumnos pueden estar matriculados en más de una facultad. La clasificación ecológica de los animales por el tipo de ecosistemas en que se encuentran es solapante, pues algunos animales moran en ecosistemas de diverso tipo. Frente a esta clasificación ecológica, la clasificación sistemática de los animales no admite solapamientos, sino que pretende clasificarlos de tal modo que un mismo animal no pueda estar en dos clases distintas (de mismo nivel), es decir, pretende ser una clasificación no solapante. La clasificación de los átomos en elementos químicos y la clasificación de los humanes por su año de nacimiento también son no solapantes. El resultado de clasificar 4 no solapadamente constituye no sólo un recubrimiento de A, sino incluso una partición de Á. Una partición de Á es un recubrimiento de Á cuyas clases son todas disjuntas entre sí, es decir, sin elementos comunes, Formalmente, 1.2. Gesun partición de 45 GEPAA DEGAUG = A AYXYXeGaYeGax% + Yo XNY = 0D) Las clasificaciones más importantes científicamente son las no solapantes, y a ellas nos limitaremos aquí. En lo sucesivo, siempre que hablemos de clasificaciones, queremos decir clasificaciones no solapantes. Suele Hamarse clasificación tanto a la actividad de clasificar como al resultado de esa actividad, la partición. Esta ambigiedad es inofensiva. Más grave es que, a veces, se utiliza la misma palabra clasificación" para referirse a dos actividades o procesos totalmente distintos: la clasificación de un dominio de individuos en clases, 76

TAXONOMÍA FORMAL por un lado, y el diagnóstico o identificación * de uno de esos individuos como perteneciente a una de esas clases previamente establecidas, por otro. La primera constituye una actividad científica creativa, mientras que la segunda es una mera práctica. Esta distinción es paralela a la que puede establecerse entre metrización (introducción de una magnitud métrica en un campo previamente cualitativo) y medición (determinación del valor concreto de esa magnitud para un individuo determinado). No puede haber medición sin metrización previa, como no puede haber diagnóstico sin previa clasificación. El médico diagnostica la dolencia concreta que padece el paciente en un momento dado interpretándola o reconociéndola como (elemento de) una enfermedad determinada, lo cual presu- pone una previa clasificación de las dolencias concretas en enfermedades. El naturalista de campo, o el aficionado provisto de una guía de campo, diagnostica o identifica una planta o un pájaro que tiene ante sus ojos como perteneciente a una cierta clase de una clasificación previamente establecida. A las clases establecidas por una clasificación las llamamos taxones. En este sentido, una enfermedad (clase de dolencias) o un elemento químico (clase de átomos) o una especie biológica (clase? de organismos) es un taxón, y, por tanto, el diagnóstico es el proceso que asigna un individuo de un dominio determinado al taxón que le corresponde (al que pertenece). El diagnóstico es, pues, una función que a cada individuo de un dominio determinado asigna el taxón de una clasificación o partición dada de ese dominio al que el individuo en cuestión pertenece. * La mayoría de los biólogos sistemáticos usan el término «identificación» para este proceso, pero esa terminología puede ser confundente en estudios formales. Por eso preferimos aquí el término «diagnóstico», utilizado, por ejemplo, en N. Jardine y R, Sibson: Mathematical Taxonomy John Wiley, Londres, 1971, p. 267. 3 Para simplificar la exposición formal, aquí suponemos que una especie es una clase de Organismos. Sin embargo, aunque a toda especie corresponde una clase de organismos, la especie misma -—en el sentido de la biología evolucionista— no es una clase (entidad abstracta), sino una entidad histórica concreta, sometida a nacimiento, evolución y extinción (o bifurcación). Para más detalles, véase el capítulo 4. Ms q

 Puesto que todo individuo pertenece a un y sólo un taxón de una partición dada, el taxón al que ese individuo pertenece está unívocamente determinado. La función diagnóstico 4,, depende de la partición dada Q, Sea Q una partición de A. dy; A-> Q, Definimos: o da = 1XaZ)lac An ZeQar acZi La tarea de diagnosticar o identificar 4 € A respecto a la partición Q de A significa calcular el valor d,(a). Para ello, a veces, nos servimos de la observación de los síntomas observables de a y los comparamos con los síndromes (conjuntos de síntomas característicos) de los diversos taxones. Otras veces hemos de considerar ciertas relaciones en que 2 está o no está con otros individuos, etc. La nomenclatura es la asignación de nombres convenidos por la comunidad científica a los diversos taxones distinguidos en la clasificación. Pero aquí no vamos a ocuparnos del diagnóstico ni de la nomenclatura, sino sólo del resultado directo de la clasificación: las particiones. Particiones y relaciones de equivalencia Como es bien sabido, hay una estrecha correlación entre las particiones y las relaciones de equivalencia. Aquí mismo usaremos más adelante una cierta relación de equivalencia para definir una partición (la fusión de dos particiones dadas) que nos interesa caracterizar. Una relación de equivalencia en Á4 es una relación RE AX A, que es reflexiva, simétrica y transitiva. Por ejemplo, la identidad es una relación de equivalencia en cualquier conjunto. El paralelismo es una relación de equivalencia entre rectas. El tener el mismo número de protones en el núcleo es una relación de equivalencia entre átomos. St Res una relación de equivalencia en Á y xen un miembro de A, entonces el conjunto de todos los miembros de Á que están en 78

_. JAXONOMÍA FORMAL A AA _—_ Ass a la relación R con x se llama la clase de equivalencia (respecto a R) de x, simbolizada como x,. x mismo es un representante de x,. Definimos: 2.2 xo =1ye Al yRo Je aquí se sigue como corolario que dos clases de equivalencia Xp Y 2, SON idénticas sí y sólo si sus representantes x y z están entre sí en la relación de equivalencia R. 20 Vxze A lx, = 2, > xRz Llamemos Part, al conjunto de todas las particiones de A. Y llamemos Eq, al conjunto de todas las relaciones de equivalencia en A. La correlación aludida anteriormente consiste en que cada partición de Á determina una cierta relación de equivalencia en 4, y cada relación de equivalencia en Á determina una cierta partición de A, Sea Q una partición de A. La relación de equivalencia R, inducida o determinada por Qes la relación en que están dos individuos de Asi y sólo si ambos pertenecen al mismo Q-taxón. Definimos: 2,4 | Ro= 1 y) € Al dx) = a Fácilmente se comprueba que K¿ es una relación de equivalencia. o Sea R una relación de equivalencia en A. La partición A/R de A inducida o determinada por R es el llamado espacio cociente de A respecto a KR, es decir, la clase de todas las clases de equivalencia respecto a R de elementos de A. Definimos: 2 A/R=4x,1x€ Aj Fácilmente se comprueba que 4/ R es una partición de A, Precisamente una partición cualquiera de A coincide con el espacio cociente de A respecto a la relación de equivalencia inducida por esa partición. En resumen: /9

CONCEPTOS Y TEORÍAS EN LA CIENCIA A A AN y xq áKÁK-A > -kxmz A A A AR 5 É E_—_—_—_————— A AAA A _ —_—_ a ml a PS ATC ¡UH San .— 2.6 Re Eq,y = > A/Re Part, dd Q € Part, > R,¿€ Eg, 2.8 Qe Pat, > Q = Á/R, Con frecuencia se introducen las particiones mediante relaciones de equivalencia. La partición de las rectas del plano en direcciones es la partición inducida por la relación de equivalencia de paralelismo, es decir, el conjunto cociente de las rectas por el paralelismo, La partición de los átomos en elementos químicos es la partición inducida por la relación de equivalencia de tener igual número de protones en el núcleo, es decir, el conjunto cociente de los átomos por la igualdad del número de protones. La partición de los fonos de una lengua en fonemas es la partición inducida por la relación de equivalencia de sustituibilidad salva significatione, es decir, el conjunto cociente de los fonos por la sustituibilidad salva significatione. Llamemos /, a la identidad restringida a A, es decir, £, = [(x y) € A? 1x = 1, y llamemos 4* a la clase de todos los pares de elementos de A, es decir, A2x = AX A. | Como fácilmente se comprueba, /, es no sólo una relación de equivalencia en Á, sino incluso la mínima relación de equivalencia en A, en el sentido de que está incluida en todas las demás. 4?, por el contrario, no sólo es también una relación de equivalencia en A, sino que además es la máxima, en el sentido de que todas las demás están incluidas en ella. En resumen: 2.9 l,e Eq, 2.10 [,= a Eg, 2oLd para toda 4 (Re Eq, 1,C. RK) 212 A*e Eg, 2.13 A?% = U Eg, 2.14 para toda R: (Re Eq, = > R CA?) 2.15

TAXONOMÍA FORMAL A _ > - A ni A A A 5 A 1 A A áAAKÁKÁKÁKÁK

..CONCEPTOS Y TEORÍAS EN LA CIENCIA RA NI A parcial tiene un mínimo, el conjunto de todas las clases unitarias O singletones de A, al que simbolizaremos por Sng,, y tiene un máximo, (43. En efecto, Sng, no sólo es una partición de A, sino que además es más fina que cualquier otra partición de A, Y (4j no sólo es una partición de A, sino que es la más grosera de todas las particiones de Á. 3,3 Sang, = lg 1x€ Aj 3.4 VQ € Part, :Sng, * Q SE, VQ Part, : Q < (4) En resumen, (Part, %) es una ordenación parcial con mínimo, 9ng,, y máximo, (4). Jerarquías taxonómicas Un mismo dominio de individuos puede clasificarse de muy diversas maneras, dando lugar a distintas particiones del mismo. Así, podemos clasificar los minerales por su color, o por su estructura cristalina, o por su composición química, o por el lugar en que se encuentran, etc. “Todas estas clasificaciones son independientes unas de otras y son incomparables entre sí en cuanto a finura. No forman una jerarquía taxonómica. Otras veces, sin embargo, nos encontramos con clasificaciones interdependientes, cuyas particiones son comparables entre sí. Así podemos clasificar las dolencias que nos aquejan en hereditarias y adquiridas. Más finamente, podemos clasificar las adquiridas en traumáticas, degenerativas e infecciosas. Todavía más finamente, podemos clasificar las infecciosas en víricas, bacterianas, fúngicas, etc. Podemos seguir afinando más y clasificar las bacterianas producidas por bacilos, por estreptococos, etc. Y aún más finamente podemos clasificar las dolencias bacterianas producidas por bacilos en enfermedades como el tétanos, la tuberculosis, etc. Todas estas clasificaciones son comparables entre sí en cuanto a finura. For$2

TAXONOMÍA FORMAL ÉK— a A A A KÉ—— o e = e — _ — O A RÁ € A A RN A ——_————————_—_—_—_—_—_— A A e a man una jerarquía taxonómica. Todos los individuos (en este caso, las dolencias concretas) que sean miembros de un taxón de la partición más fina (en este caso, la partición en enfermedades) serán también miembros de un mismo taxón en cada una de las otras clasificaciones. “Todas las dolencias concretas que sean casos de tuberculosis serán producidas por bacilos, de origen bacteriano, infecciosas y adquiridas. La mayoría de los subconjuntos de Part, es decir, la mayoría de los conjuntos de particiones de A, contienen particiones Incomparables entre sí en cuanto a finura. Si ocurre que un conjunto Ef de particiones de Á sólo contiene particiones comparables entre sí en cuanto a finura, diremos que H constituye una jerarquía taxonómica sobre Á, 41 Bes una jerarquía taxonómica sobre A = > HC Part, AVXYe H(X = < Y v Y = 2) Habíamos visto en 3 que HC Part, A es una ordenación total En el contexto de una jerarquía taxonómica HA, las diversas particiones que forman A se suelen llamar categorías de H. Así los individuos del dominio básico A son miembros de los taxones de las diversas particiones o categorías. Los taxones mismos son miembros de las particiones o categorías. Y las particiones o categorías son miembros de la jerarquía taxonómica. Las jerarquías taxonómicas más conocidas son las usadas en la biología. La llamada jerarquía taxonómica linneana consta de 7 categorías: especie, género, familia, orden, clase, filo (o phylux) y reino, que $3

constituyen otras tantas particiones del dominio de los organismos. Así, un organismo concreto, por ejemplo esta abeja que pasa añora zumbando por aquí, pertenece a la especie Apis mellifera, al género Apis, a la familia Apidae, al orden Hymenoptera, a la clase Insecta, al filo Arthropoda y al reino Animalia. Cada uno de los taxones citados está incluido en todos los siguientes. Cuando decimos que esta abeja pertenece, por ejemplo, al género Apis, queremos decir que pertenece al taxón Apís el cual, a su vez, pertenece a la categoría género (o, si se prefiere, en latín, genzs). Esta abeja es un individuo que es miembro del taxón Apis. El taxón Apís es miembro de la categoría género. La categoría género es miembro de la jerarquía taxonómica linneana. Á partir de la jerarquía linneana se obtienen a veces Otras jerar-. quías taxomómicas más amplias añadiendo nuevas categorías, como tribu (entre género y familia) o cohorte (entre orden y clase), o como las formadas con los prefijos supery sub (superfamilia, subfamilia, exc.). Dada una jerarquía taxonómica 4, cada categoría de esa jerarquía tiene un cierto rango o nivel. Puesto que todas las categorías o particiones de A'son comparables entre sí, podemos ordenarlas de tal modo que la más fina aparezca en primer lugar (tenga rango 1), la siguiente más fina tenga rango 2, etc., hasta llegar a la menos fina, que tendrá máximo rango o nivel. Así, en la jerarquía taxonómica linneana, la categoría especie tiene rango 1, la categoría género tiene rango 2, la categoría familia tiene rango 3, la categoría orden tiene rango 4, la categoría clase tiene rango 5, la categoría phyum tiene rango 6 y la categoría reino tiene rango 7. Sea fl una jerarquía taxonómica que conste de 7 particiones o categorías. Puesto que (4%, $<>$ es una ordenación total, hay un isomorfismo de (4H, $<>$) con (1, 2, ..., a], tal que para cada X Ye HB: X$<$ Ye fi

TAXONOMÍA FORMAL A e RÁ —Á 4.3 rango (A) = (3%) KA ANA A Naturalmente esta definición sólo vale para jerarquías finitas, es decir, con un número finito de particiones o categorías, que son las que se usan en la ciencia. Si quisieran considerarse también jerarquías infinitas, bastaría con tomar segmentos Iniciales cualesquiera de la clase (2 de todos los ordinales, en vez de segmentos iniciales de ÑN, como hemos hecho aquí. El rango de una categoría o partición de una jerarquía taxonómica es un número natural. Cuanto menor es el rango, tanto mayores la finura de la partición. Para cualesquiera particiones X, Y de una jerarquía E: 4,4 XX Y“ rango (4) < rango (Y) También se suele decir que un taxón tiene rango, a saber, el rango de la categoría a la que ese taxón pertenece. Así, en la jerarquía taxonómica linneana, el género Apís tiene rango 2, es decir, el género Apís pertenece a la categoría género, que es la que propiamente tiene rango 2. | La paradoja de Gregg Los biólogos clasifican los organismos en taxones de diverso rango. Normalmente los taxones de rango superior incluyen varios taxones de cada rango inferior y, por ello, tienen más miembros. que ellos y son extensionalmente distintos de ellos. Así, por ejemplo, la clase Insecta incluye muchos otros órdenes, además de Hymenoptera; el orden Hymenoptera incluye otras muchas familias, además de Apidae. La familia Apidae incluye otros géneros, además de Apis, etc. Ásí pues, el caso normal consiste en que un taxón de cierto nivel es un subconjunto propio de otro taxón de nivel superior, pero no coincide con él. Estos taxones normales, que incluyen vatios taxones de nivel inferior dado, se llaman taxones 85

politípicos. Sin embargo, no todos los taxones son politípicos, también los hay monotípicos. Veamos algunos ejemplos. Los botánicos clasifican las plantas del modo ya indicado, en especies, géneros, familias, órdenes, etc. Asi los ginkgos, los conocidos árboles procedentes de la China con hoja en forma de abanico, pertenecen a la especie Ginkgo biloba, al género Ginkgo, a la familia Ginkgoaceae y al orden Ginkgoales. Pero todos esos taxones, de diferente rango, contienen exactamente los mismos individuos: los ginkgos, El orden Ginkgoales incluye una sola familia, que incluye un solo género, que posee una sola especie. “Todos esos taxones son monotípicos. Los ornitólogos clasifican las aves dentro de las categorías de la jerarquía linneana. Los kiwis, primitivas aves sin alas típicas de Nueva Zelanda, son los únicos animales pertenecientes al género Apteryx, a la familia Apterygidae y al orden Apterygiformes, que, por tanto, son taxones monotípicos. El orden Apteryeiformes contiene una sola familia, Apterygidae, que a su vez incluye un solo género, Apteryx, el cual, sin embargo, se subdivide en 3 especies distintas. Eos ornitorrincos son unos primitivos mamíferos australianos y los zoólogos los agrupan en una sola especie, Ornithorhynchus anatinus, que es la única de que consta el género Ornithorhynchus, que a su vez es el único incluido en la familia de los Ornithorhynchidae. Los tres taxones mencionados son, por tanto, monotípicos. Los oricteropos o cerdos hormigueros son unos mamíferos africanos de largo morro cilíndrico y poderosas patas delanteras, que les sirven para excavar la tierra. Los zoólogos los clasifican en una sola especie, Orycteropus afer, que es la única de que consta el género Orycteropus, que a su vez es el único que está incluido en la familia Orycteropodidae y en el orden Tubulidentata. Todos estos taxones son también monotípicos. Si los taxones de la clasificación biológica son conjuntos, entonces los taxones monotípicos (que tienen los mismos elementos) han de ser idénticos, pues dos conjuntos con los mismos elementos son. el mismo conjunto. Pero los biólogos sistemáticos, que establecen las clasificaciones, piensan que una especie es siem$6

e pre algo muy distinto de una familia, por ejemplo. Por tanto, aunque una familia y una especie tengan los mismos elementos (organismos), serán taxones distintos. El primero que se dio cuenta de esta dificultad fue John R. Gregg, y desde entonces se conoce como la paradoja de Gregg. Desde 1954, en que Gregg * llamó la atención sobre la paradoja que lleva su nombre, se han propuesto diversos intentos de solución. En 1957 Parker-Rhodes * propuso definir un taxón superior no como un conjunto de individuos (es decir, de organismos), sino como el conjunto de sus taxones inmediatamente inferiores. Con esto se soluciona la paradoja de Gregg, pero se aparta uno también de la noción intuitiva de taxón. Así un taxón de clase ya no sería un conjunto de organismos, sino un conjunto de órdenes. No podríamos seguir diciendo que este gato es un mamífero. La solución resulta insatisfactoria. En 1964 A. Sklar* propuso añadir a las 2 particiones de una jerarquía H n conjuntos (disjuntos con Uf, por ejemplo, conjuntos de números naturales) G, ..., (7, tales que para cada ¿, / (1 < 1 < m): G,€ 6, pero GE G, de tal modo que cada taxón X de rango £ deviniese XU G.. . Así (para retomar nuestro último ejemplo de taxones ON la especie Orfeteropus ajer devendría foricteropos) U (14, el nuevo género Oryeteropus sería foricteroposj U [1, 2), la nueva familia Orycteropodidae sería foricteropos) U (1, 2, 3) y el orden Tubulidentata sería foricteroposi U [1, 2, 3, 4). Con esto se soluciona la paradoja de Gregg, pues cada taxón es distinto de sus correspondientes toxones superiores y está incluido en ellos. Se trata de un truco técnico formalmente correcto, pues se conservan las relaciones de per* John R. Gregg: The Language of Taxonomy, Columbia University Press, Nueva York, 1954. 5 A. E Parker-Rhodes: «Review of The Language of Taxonomy», Philosophical Revier, 66, 1957. 6 Abe Sklar: «On Category Overlapping in sonebi Incluido en Form and Siratегy im Science (editado por J. R. Gregg y ET. Harris), Reidel Publishing Co., ALGU 1964. 87

¿.. CONCEPTOS Y TEORÍAS EN LA CIENCIA q __»P_-— O NA A A AAA mea tenencia de los organismos a los taxones (en este sentido es un progreso respecto a la solución de Parker-Rhodes) y las de inclusión entre taxones, al tiempo que se distinguen los taxones monotípicos de distinto rango (que se diferencian ahora por poseer algún número más o menos). Pero resulta artificioso concebir los taxones como conjuntos de algo más que de organismos, y resulta insatisfactorio decir que el número 1 es un cerdo hormiguero. En 1966 R. C. Buck y D. L. Hull" propusieron definir intensionalmente, mediante listas de propiedades, los taxones, de tal modo que se exigieran más propiedades para la pertenencia a los taxones de menor rango. Pero aquí hay una cierta confusión, pues los taxones siguen siendo considerados como conjuntos, es decir, como entidades extensionales. Y dos conjuntos que tienen los mismos elementos son idénticos, cualquiera que sea el camino que sigamos para defínirlos. | En 1969 propuso N. Jardine* la primera solución satisfactoria de la paradoja de Gregg, que consistía en definir un taxón T'como un par ordenado XD, r», donde D es la extensión del taxón y + es su rango. Así, aunque £,, £, y T, sean taxones monotípicos (es decir, de igual extensión, D) de distinto rango (es decir, de rango Y,» Ty Y, donde 1, », É r,), sin embargo, son distintos taxones, pues iD, 1,» F ¿D, pS + ¿D, Fa)» Desde un punto de vista intuitivo, lo más satisfactorio es considerar los taxones como conjuntos de organismos. El problema de Gregg puede resolverse (o, mejor dicho, disolverse) por el trivial expediente de distinguir los taxones a secas, que serán meros conjuntos de organismos, de los taxones jerarquizados, que serán pares ordenados de taxones a secas y rangos. Por tanto dos taxones monotípicos coinciden en cuanto taxones a secas (son el mismo conjunto de organismos), pero difieren en cuanto taxones jerar* Roger €. Buck y David L. Hull: «The Logical Structure of Linnacan Hierarchy», Systematic Zoology, 15, 1966. ? Nicholas Jardine: «A Logical Basis for Biological Classification», Systematic Zoology 18, 1969, $8

Lao 1AXONOMÍA FORMAL ———-- A X AÁÉA A KÁ RÁ —Á quizados (pues poseen rango distinto). Y el que los consideremos de un modo u otro depende de nosotros, no de ellos. p Superposición de particiones Frecuentemente obtenemos nuevas e interesantes particiones superponiendo dos particiones que ya teníamos. La nueva partición así obtenida es más fina que ambas y recoge todas las distinciones hechas por cualquiera de ellas. Si Q y G'son particiones de 4, una manera usual de representar la superposición de Q y G consiste en dibujar una tabla cuyas filas corresponden a los taxones de Q y cuyas columnas corresponden a los taxones de G. Los cuadros o casillas de la tabla representan entonces la nueva partición, que es la superposición de las dos anteriores, Por ejemplo, sea 4 = (0, 1, 2,3,4,5,6,7,8, 9, Q=1Q, Q)3, donde Q, = 10, 1, 2, 3, 43 y Q, = 15, 6,7,8, 9, y G=1G,, G,, G,, Gt, donde G, = 103), G, = (1, 3, 5,7, 9, G, = 12, 4) y G, = (6, 8]. La rabla representa la superposición de Q y G. Esta superposición, (10), (1, 31, 12, 43, (5,7, 9), 16, 8$), es ella misma una nueva partición de Á, Las casillas vacías de la tabla no forman parte de la superposición de Q y G, pues queremos que ésta sea una partición, y una partlción es una colección de clases no vacías. . La superposición de particiones para la producción de nuevas particiones ocurre en casi todas las ciencias, aunque no ha solido 89

... CONCEPTOS Y TEORÍAS EN LA CIENCIA ser analizada", En fonología, por ejemplo, la partición de las consonantes por su punto de articulación (en labiales, labiodentales, interdentales, alveolares, etc.) se superpone con frecuencia con la partición de las consonantes por su modo de articulación (en oclusivas, fricativas, africadas, vibrantes, etc.) para así producir una nueva partición o clasificación de las consonantes, que es más fina y más informativa que cualquiera de las otras dos, tomadas por separado. No todos los ejemplos son tan triviales como éste. Uno de los más potentes resultados teóricos de la química, la tabla periódica de los elementos, es la partición de los elementos químicos que resulta de la superposición de la partición de los elementos químicos en grupos (en gases inertes, metales alcalinos, etc.) y de la partición de los elementos químicos en períodos. El hecho de que la mayoría de los taxones de la partición resultante contienen un solo miembro, mientras que dos de ellos tienen quince, complica la representación gráfica de la tabla, pero es evidente que se trata de una superposición de dos particiones dadas. Otro ejemplo teóricamente fecundo de superposición de particiones, esta vez proveniente de la astronomía, está constituido por el diagrama de Hertzsprung-Russell, que es la partición de las estrellas que resulta de la superposición de la partición de las estrellas en clases espectrales y de la partición de las estrellas en magnitudes absolutas. La superposición o producto de dos particiones P y Q del mismo dominio Á, que simbolizaremos mediante PGS Q, consiste en la clase de todas las intersecciones no vacías de taxones de P con taxones de Q. La operación (o) de superposición se define así: 61. PQ Q = [Z1|1IXeée PIYEQ(Z = XNOYAZAD)! A partir de esta definición se puede probar que la superposición de dos particiones de Á es siempre a su vez una partición de A, que 69 conduce de particiones de Aa particiones de A. ? Kirkhoft y Domotor definieron operaciones de producto y suma de particiones, equivalentes a las de superposición y fusión aquí introducidas, 90

_ TAXONOMÍA FORMAL 200 6.2 Gs) : Part, x Part, —> Part, Prueba. Sean P y Q particiones de Á. Hemos de probar que P 69 Q es también una partición de 4, lo cual a su vez nos obliga a pasar revista a las 4 condiciones de la definición de partición. (1) PC) QC PA. En efecto, cada elemento de PGS Q es la intersección de dos subconjuntos de A y, por tanto, es él mismo un subconjunto de A. () DE PO Q, por definición de PE Q. (3) UPS Q = 4. Seaac U (269 Q). Para algún Ze PGS Q ae Z. Para algún X € £ y algún YeQ, Z = XM Y Luego ae XN Y a€ X, y (puesto que XC 4, ya que Xe Py Pes una partición de A) 4€ A. Por tanto U (P69 Q) C 4. Seaahora be A. Puesto que Py Q son particiones de A, be db) y be d (6), por tanto 6€ 4,6) Nnd (e) y por consiguiente, para algún X ep (a saber, d (b) y algún Ye Q (a saber, 2(0)), be XM Y. Pero este XN Y que no es vacío, pues tiene bh cono elemento, es un miembro de PÓY) Q por definición de PGS Q. Luego be U (PG Q). Por tanto A € U (PG Q). Con lo que queda probado que U (PGS Q) = 4, (4) Si Xe PODOQ Ye PQ QyX4 Y entonces XM Y =(D, Sea Xe P E9 Qy Ye PO) Q. Entonces habrá X, Y € PyX, Y € Q, tales que X = X NXeY = Y NY.S XN YA, entonces X MX, NYINYXOA, con lo que X NY + gdDyXn L, +, y, por tanto, X = Y y £ = Y, (pues Py Qson particiones), y, por conslguiente, pa Y Luego si X + Y entonces XM Y =(4, que es lo último que quedaba por demostrar. La operación (9) de superposición es asociativa, conmutativa e. idempotente, es decir, para cualesquiera particiones P, Q, G del mismo dominio: 6.3 PO00SGE = PO(08S 6) 6.4 | PQDQ = Q0DP 6.5 | PQ P = P 91

¡$qQPRIÓáÓA (q —>]>] MN A AAA AA A A A AA A A A A A A A A A ñ— _——— _—_— A a a a —Á | A KÁ 2 XÉÁ rá El semigrupo (Part, 69) tiene un elemento absorbente, Sng,, y un elemento neutro, (4), es decir, para cada partición P de A: 6.6 PGS Sng, =Sng, 6.7 PO lA =P ¿Es la superposición de dos particiones siempre comparable con ellas respecto a finura? Sí. La superposición es siempre más o igual de fina que cada una de las particiones superpuestas. Para cualesquiera particiones P, Q, de 4: 6.8 POQ3=P; PQQ30Q De aquí se sigue como corolario que la cardinalidad (el número de miembros) de la superposición es igual o mayor que la de las particiones superpuestas: 6.9 PD Q1> lPl; IPOD Ql> IQ ¿Es el semigrupo fuera un grupo, tendría que haber un inverso de Q, es decir, una partición Q'de A, tal que Q E) Q"= (4). Pero entonces 2

3. TAXONOMÍA FORMAL 6.10 P<=Q=>PO0OQ=P Prueba. Supongamos que P < Q. Sea Ze PQ) Q. Entonces (por 6,1) hay un Xe Py un Ye Q, tales que Z=X O Yy ZA. Por 3.2 y puesto que P < Q, tenemos que XC Y v XM Y=, Pero XN Y =Z + Y, Luego XC Y. Por tanto, NM Y = Xy, teniendo en cuenta que Z= X f1 Y tenemos que Z = X. Luego ZE P, pues Xe P Así pues, PG) QE LSea Ze P. Entonces (por 3.1) hay un Ye Q tal que ZE Y Luego Z=Z(M Y y, además, Z + (4, ya que Ze PyP es una partición. Luego Ze PQ Q, por 6.1. Así pues, PE PG Q. En resumen, PG) Q=2 Fusión de particiones Sea Gun conjunto de subconjuntos de A, es decir, GE PA, Decimos que un individuo cualquiera 4 € Aes G-conectable con otro individuo 6€ Ási podemos pasar de un conjunto de G que contiene 42 otro conjunto de (G que contiene 6 a través de una serie de conjuntos no disjuntos intermedios. En la figura siguiente los círculos representan conjuntos de G. E

... CONCEPTOS Y TEORÍAS EN LA CIENCIA Mirando la figura, diremos que 4 es conectable con 6 y con €, pero no con co con d. Simbolicemos mediante K.. la relación de G-conectabilidad. Sea GC PA. Sean a, 6€ A. Definimos: ya! aK be IZ,...L 604€ L ADELA ZOZ EÉDA..AZ_ MZ +) Sea Gun recubrimiento de A. Está claro que la relación le de G-conectabilidad es reflexiva, simétrica y transitiva en A. Para cualquier recubrimiento G de 4: aa Ke es una relación de equivalencia en A. Consideremos ahora dos particiones cualesquiera de 4, por ejemplo Py Q. Evidentemente la unión PUQ será un recubrimiento de Á y K,, y será una relación de equivalencia en 4. La relación K;, ,¿ de PU Q-conectividad es la relación de equivalencia en que están dos elementos cualesquiera de Á si y sólo si es posible conectar el uno con el otro a través de una serie de taxones solapantes de entre los pertenecientes a cualquiera de las dos particiones Po Q. Como ya vimos, toda relación de equivalencia en Á induce una partición de A, a saber, el espacio cociente de A por esa relación. Esto nos permite definir una nueva operación entre particiones, a la que llamaremos fusión o suma y a la que simbolizaremos por «SH». Sean P y Q particiones de A. Definimos: 7.3 PO Q= Kn = kmo le De esta definición de P(H Q como espacio cociente de Á por una relación de equivalencia se sigue por 2.6 que $) es una operación que lleva de particiones de Aa particiones de A, es decir, que la fusión de dos particiones siempre es de nuevo una partición. 7.4 E : Part, X Part, > Part, 94

__ TAXONOMÍA FORMAL _ o -»>--A a A — A rr Quizá no esté de más tratar de captar intuitivamente la diferencia entre la superposición y la fusión de particiones. Dadas dos particiones Py Q del mismo dominio Á, su superposición PGS Q es la partición que hace todas (y solas) las distinciones que hacen P o Q, mientras que su fusión Pb Q es la partición que hace sólo aquellas distinciones comunes a Py Q. El siguiente cuadro puede ayudar a visualizar estas operaciones. Se trata de partir el conjunto A de los puntos de la línea horizontal dibujada. Las particiones P, Q PE) Qy PO Q de Ase representan mediante filas de casillas. A POQ P Q Ppo9Q La operación (Y) de fusión es asociativa, conmmutativa e idempotente, es decir, para cualesquiera particiones P, Q, G del mismo dominio: | ES POB G = PD0100 Y) TG PBOQO = -00P IR POPE Como fácilmente se comprueba, cada una de las operaciones de superposición y fusión es absorbente respecto a la otra, es decir, para cualesquiera particiones Py Q del mismo dominio: 738 POPOQ = ": POP0Q = P Hemos definido la operación de fusión de dos particiones de A como el espacio cociente de Á por la relación de conectabilidad en

... CONCEPTOS Y TEORÍAS EN LA CIENCIA la unión de ambas particiones. Ahora presentamos otra manera (equivalente) de definir la fusión de dos particiones, Cuando fusionamos dos particiones, juntamos en un solo taxón todos los taxones de ambas particiones que son comunicables entre sí por un camino de taxones no disjuntos. La noción intuitiva de camino puede precisarse mediante una función numérica que oscila entre taxones comunicados (no disjuntos) de ambas particiones. Dos taxones son comunicables si hay un camino de uno al otro. Un grupo máximo de taxones comunicables forman una isla. Y la fusión de ambas particiones es precisamente el conjunto de esas islas, que forman una nueva partición. Las siguientes definiciones precisan esta caracterización de la fusión. Un camino en dos particiones Py Q es una función f: N —= P UQ, tal que Anmje Psi a es par, flm)e Q si n es impar, y para todo m MON) 0. Un taxón Ze PUQ es comunicable (respecto a las particiones P y Q) con otro taxón We PUQ si y solo si existe un camino fen Py Q, y números a, m EN, tales que [n) = Zy fin) = Y Dado un taxón Ye PUQ, la isla de Y (respecto a las particiones Py Q) es la unión de todos los taxones comunicables con Y Isla (Y) = ULZI Ze PUQ A Zes comunicable con Y] Con esto estamos en posición de ofrecer la definición alternativa de fusión *". Para cualesquiera particiones P, Q: PO Q= isla (2) 1 Ze PUQ) El retículo de las particiones Fl hecho de que las operaciones Y) y (9 tengan las propiedades aquí señaladas indica que el conjunto de las particiones a Á consti'* La Introducción de la noción de fusión de particiones y las dos definiciones (la 7.3 y ésta) de esta operación aquí presentadas se deben a Enrique Casanovas. 96

_... TAXONOMÍA FORMAL A A A — AKÁKÁKÁKÁXA A s m 2 tuye de algún modo un retículo. En efecto, así es. Ya habíamos visto que (Part, G

- CONCEPTOS Y TEORÍAS EN LA CIENCIA a — a Prueba. Sea X € Pun taxón cualquiera de P. Puesto que X4 0, hay al menos un elemento en X; llamémoslo 4: 14€ A. Sea x un elemento cualquiera de X. Entonces x K,,,¿ 4 por la definición 7.1. Por tanto, xE 4, Así pues, para cualquier x € Á ocurre que x€ Agp y Es decir, $ Se donde 4g;,, E POGQ por 7.3. En resumen, para cada taxón X €

PGD QS 0) Prueba. Sea G una partición de A, tal que PX Gy Qx< G Tenemos que probar que PG) Q < = G, es decir, que para cada X € PO Q hay un We G, tal que XC W.SeaXe PD QX* +, pues Xes un taxón, y por tanto tendrá al menos un miembro 4€ Xi Puesto que Pes una partición de ÁA y 4€ Á, para algún Ye Pocurre que 4€ Y Puesto que PX G, hay un We G, tal que YC W y, por tanto, 4 € W. Éste es el W que buscábamos. Hemos de probar que XC W Sea xs X. Hemos de probar que x€ W. Puesto que PH Qes un conjunto de clases de equivalencia, por 7.3, y 4€ XE PO Q, resulta que X = 4, Puesto que x€ X, ocurre que a K ar Por tanto, hay taxones an LE (Q tales que LELNES LENA NA AO ESA AZ FL, según la definición 7.1. Puesto que P= < Gy Q < = G, cada taxón de Po de Q está incluido en un taxón de G, por lo que habrá Va Eb tales que Z,C V (paral < ¿< m.Como 2 NZ +9, v MN Y, F $ y, por tanto, Y, = V,, pues G es una partición (y si Y, + V,, entonces V, M Y, = 10). De igual modo: V, = Y, ... Y, = Y. Puesto que 4€ Wyac€ V (puesae Ly Z €. V), y tanto W como V, son taxones de la partición G, W= V,. Así pues, W= V, = WM) =..= V. Puesto quexe Z,% CV y V - Y resulta que ” PA 98

_FAXONOMÍA FORMAL yxzPoEOÓRMM* A A AA A RR A ds a A x € W. Por consiguiente AC W, que es lo que había que probar. Luego PH) Q = G. De 8.4 y 8.5 se sigue: 8.6 supif Qi = PD Q De 8.3 y 8.6, y del hecho de que es una ordenación parcial, se sigue que las particiones de un dominio dado A forman un retículo respecto a las operaciones de superposición y de fusión. Para cualquier 4: 8.7 (Part , es un retículo Un retículo es complementario si para cada uno de sus elementos hay al menos un complemento, es decir, otro elemento tal que el ínfimo de ambos es el elemento mínimo de la ordenación parcial correspondiente y el supremo de ambos es el elemento máximo. En el caso particular del retículo de las particiones de 4, un complemento de un elemento 4€ 4Aes otro elemento b€ 4, tal que 469 6 =5Sng, y 4d bh = 14]. De hecho cada partición de A tiene al menos un complemento, aunque no vamos a exponer aquí la prueba, que es un poco complicada. Pero anotamos que: 8.8 (Part , $, 69, Y es un retículo complementario Un álgebra de Boole es un retículo complementario y distributivo. ¿Es el retículo de las particiones de A un álgebra de Boole? No, no lo es, pues no es distributivo. Si fuera distributivo, valdría que para cualesquiera particiones P, Q, G POHD(QO GE =1(P 6) Q O (26 6). Consideremos ahora un contraejemplo. Sea A = 10, 1,23, P=1405, 41, 233, Q = (10, 14, (23), G = 110, 2), 115. Resulta que: PO(Q08 0 =PO0 (A =P 728090 PS O = Sag, Y Sng, = Sng, 99

.. CONCEPTOS Y TEORÍAS EN LA CIENCIA a e o Pero Sng, = 1105 11), 1234 * 10), (1, 2; =P Por tanto, el retículo no es distributivo. En un retículo distributivo cada elemento tiene a lo sumo un complemento. Pero puesto que el retículo de las particiones no es distributivo, una partición puede tener más de un complemento. Y, en efecto, así es. El mismo contraejemplo que acabamos de considerar ejemplifica también esta multiplicidad de complementos, pues tanto Q como Gson complementos de P, como fácilmente se comprueba. 100

CAPÍTULO 4 MEREOLOGÍA, CONJUNTOS Y ONTOLOGÍA BIOLÓGICA

Desde 1974, año de publicación del artículo de M. Ghiselin «Una solución radical al problema de la especie», se ha desatado entre los filósofos de la biología una polémica vigorosa sobre la cuestión de si los taxones biológicos, y en particular las bioespecies (especies de organismos), son clases o individuos. Obviamente no son ninguna de estas cosas, pero la falta de recursos conceptuales adecuados ha tendido a oscurecer la discusión. D. Hull ba mostrado convincentemente que las bioespecies (entidades que nacen, evolucionan y se dividen o se extinguen) no son clases, aunque ha tenido menos éxito en la defensa de su tesis de que las especies son individuos. Diversos filósofos, como A. Rosenberg y M. Williams, han aceptado la posición de. Ghiselin y Hull, aunque otros, como P. Kitcher y A. Caplan, mantienen sus dudas. Varios biólogos dedicados a la sistemática, como E. Mayr, N. Eldredge y R. Willmann, también han aceptado la tesis de que las especies.son individuos como la única compatible con la teoría darwiniana de la evolución. Otros simpatizan con el fondo de la tesis, pero se resisten a usar la palabra “individuo” (normalmente reservada a organismos) para referirse a especies. (101

¿Qué es un individuo? El universo es un continuo. El mundo al que se confronta nuestra percepción es una realidad continua. Pero el mundo no es perfectamente homogéneo. Presenta todo tipo de junturas, bordes y discontinuidades —algunas graduales, otras abruptas. Una entidad histórica o cosa concreta es simplemente un trozo del mundo, un pedazo de universo, un fragmento de la realidad espaciotemporal. El mundo es un continuo, pero es demasiado grande y difícil de manejar como para ser tratado como una unidad singular. Parece que nos invita a segmentarlo. Si queremos hablar o pensar con algún detalle acerca de la realidad, tenemos que cortarla o partirla de algún modo. Es algo que hacemos constantemente y con facilidad. Una de las habilidades cognitivas más importantes de los mamíferos es nuestra capacidad de segmentar porciones del mundo como objetos individuales. Desde luego, hay muchas maneras distintas de dividir el mundo. Un in-dividuo es un trozo del mundo al que decidimos no dividir. Para identificar una porción del mundo como una cosa concreta es útil (y a veces imprescindible) hacer uso del espaciotiempo como marco de referencia. Un individuo ocupa una región del espaciotiempo. Si dos presuntos individuos coinciden espaciotemporalmente, son el mismo individuo. Y si no se solapan completamente, son individuos distintos, En el sentido menos exigente de «individuo», podemos eE que hay tantos individuos como regiones espaciotemporales no vacías del universo: muchísimos. Los individuos en este amplísimo sentido son los individuos arbitrarios. Basta, pues, con especificar cualquier región espacio-temporal no vacía para atrapar a un individuo (en este sentido tan tenue de la palabra). Cualquier región del espaciotiempo determina un individuo arbitrario, pero, desde luego, algunos individuos son menos arbitrarios (o más naturales) que otros. La Luna entera es un individuo más natural que la región consistente en el hemisferio norte de la 102

A O a lA Luna, la corona solar durante el año 1501 y mi nariz a partir de hoy. ¿Por qué? Si preguntamos por los criterios de naturalidad, podemos apelar a condiciones como la continuidad, la cohesión, la interacción y la delimitación o confinamiento ?. Si miramos la superficie terrestre desde arriba, una isla se nos aparece como una cosa continua, un archipiélago como una cosa dispersa. En el espacio un planeta es un objeto continuo, mientrás que un sistema planetario es una cosa dispersa. En los países secos, el agua sólo fluye en los cauces de los ríos durante la estación de las lluvias. "Tales ríos son sistemas dispersos en el tiempo, mientras que los ríos que fluyen continuamente son individuos continuos. Una región continua del espaciotiempo es una porción del espaciotiempo cuyos puntos forman un conjunto conectado, es decir, tal que es posible alcanzar cualquier punto de la región desde cualquier otro punto de la región a través de un camino continuo de puntos de la región. Nada impide que un individuo continuo pueda tener «burbujas» en su interior, como el queso de Emmental. Sobre la superficie de la Tierra los océanos forman un sistema continuo (del que los continentes son «burbujas»), mientras que los continentes sólo forman un sistema disperso (no es posible llegar de Australia a. América por un camino continental). Una cosa díspersa es una cosa que no es continua, Un objeto disperso puede ser continuo en el espacio, pero no en el tiempo (como el río que fluía por el mismo cauce, pero sólo intermitentemente, en la estación de las lluvias); o puede ser continuo en el tiempo, pero no en el espacio (como el sistema solar); o puede ser discontinuo tanto en el tiempo como en el espacio (como el follaje de un árbol caducifo-. lio). Un individuo conereto es espacio-temporalmente conectado, pero no necesita ser continuo en el espacio todo el tiempo. La explosión de una granada o una luminaria de fuegos artificiales o un pólipo con sus medusas son también individuos continuos. Quizá lo sea también el universo entero. Si, además, el individuo es espacial mente conectado en cada instante de su duración temporal, ' Compárese Mishler y Brandon, 1987. 103

q€_ER-xrIIIk :«III[ITDlA li. O PEE A e a tt A —Á decimos que es fuertemente continuo. Si no, que sólo es débilmente continuo. Un individuo paradigmático es fuertemente continuo. S1.no, nos sentimos inclinados a decir que no es un in-dtviduo, sino un dividuo. Individuos dispersos son realmente dividuos. Grupos de gente, poblaciones, bioespecies, archipiélagos, cúmulos de galaxias y Otros Sistemas similares son cosas concretas, entidades históricas, pero más bien dividuos que individuos. Si un individuo es continuo o disperso depende, al menos parcialmente, de la escala usada en la descripción. Para poder decir que el sistema es continuo, ha de ser continuo a alguna escala. Desde luego, en el caso de los individuos de nuestra experiencia cotidiana, la escala mesoscópica es la apropiada, ¿Es una galaxia un individuo continuo o una entidad dispersa? ¿Y un átomo? ¿Y la proyección de un filme? Todo depende de la escala espaciotemporal considerada. Una dificultad a tener en cuenta en la identificación de los individuos con las regiones continuas del espaciotienpo es el hecho de que muchos sistemas que a primera vista parecen individuos, como un átomo o una galaxia, son estructuras casi completamente vacías. Por ejemplo, casi toda la masa del átomo está concentrada en su núcleo, que sólo ocupa una minúscula fracción de 107*? del volumen del átomo. | Un individuo no necesita ser una entidad monolítica y homogénea. Con frecuencia podemos discernir otros individuos que son partes suyas. Una. página es una parte del libro, una hoja es una parte del árbol, una estrella es parte de la galaxia, mi pie derecho es parte del individuo arbitrario formado por mi pie derecho y la estrella Alpha Centauri. Este último individuo (el formado por mi pie derecho y la estrella Alpha Centauri) carece de toda cohesión, sus dos partes constituyentes son completamente heterogéneas y no tienen nada que ver la una con la otra. Las estrellas de la galaxia, por el contrario, se mantienen unidas por la fuerza de la gravedad que cada una de ellas ejerce sobre todas las demás. Y la hoja está íntimamente conectada con el resto del árbol en aspectos importantes, histórica, anatómica y funcional104

= = q _-—— A ld e o o A MM ar ma. me ¡2 El trozo del universo que es un individuo ocupa una región del espaciotiempo. Cualquier región está definida por sus fronteras. Un individuo debe tener bordes espaciales y temporales. Estas fronteras pueden ser intrincadas o simples, difusas o precisas, ocultas O conspicuas, arbitrariamente trazadas o naturales. Muchos individuos naturales poseen capas específicas que marcan físicamente sus fronteras, como ocurre con la pared bacteriana, la membrana nuclear del núcleo de la célula eucariota, la piel de la rana o la del elefante, que son fronteras, respectivamente, de la bacteria, del núcleo, de la rana o del elefante. El océano tiene fronteras relativamente nítidas: el suelo rocoso del fondo del océano y la superficie del mar. La atmósfera terrestre o la corona solar tienen fronteras superiores muy difusas. En general, la cuestión de si los bordes de un individuo son nítidos o difusos depende también parcialmente de la escala de observación o descripción. ¿Qué es un conjunto? Una vez que hemos fragmentado el mundo de cualquier manera que queramos, contemplamos los innumerables fragmentos y nos sentimos abrumados por la inmensa multiplicidad que hemos introducido. Para muchos propósitos, nos gustaría volver a reunir algunos de esos fragmentos y juntarlos de nuevo. Cuando un jarro cerámico cae al suelo y se rompe físicamente en muchos fragmentos, podemos recoger físicamente todos esos fragmentos en una bolsa. Sin embargo, cuando fragmentamos el mundo, distinguiendo en él partes o individuos, la operación es puramente mental, No cortamos nada físicamente. Según Cantor, un conjunto es una colección (Zusammenfassung). Cuando coleccionamos objetos en un conjunto, no es necesario reunirlos en una bolsa. Basta con considerarlos juntos, con representarlos juntos, con enfocar nuestra atención en ellos conjuntamente, Como la fragmentación del mundo en individuos, la 106

MEREOLOGÍA, CONJUNTOS Y ONTOLOGÍA BIOLÓGICA A PART MP PEC Ml PA CCA CCAA PAE ACA PER A MAC A PAN AA AAA AAA AX colección de los fragmentos en clases también es una operación mental o representacional. Como escribe Kitcher, «coleccionar ciertos objetos es representárselos juntos»*. Hay tres maneras principales de reunir cosas en conjuntos: (1) mediante una lista de los elementos del conjunto; (2) mediante una condición necesaria y suficiente de pertenencia al conjunto; y (3) mediante una definición recursiva, Mediante una ¿sta podemos coleccionar cualquier número finito de individuos para los que tengamos un nombre o denominación. No se requiere que esos individuos interactúen entre sí, ni que tengan nada en común, aparte del mero hecho de tener sus nombres en la lista. (En la Roma clásica las clases sociales estaban caracterizadas exactamente por la lista completa o censo de sus miembros, preservada y puesta al día por los censores.) Un conjunto introducido mediante una lista es una mera y nuda colección, cuyos miembros no necesitan compartir propiedad o relación alguna (aparte de la de figurar en la lista). Mediante una condición necesaria. y suficiente de pertenencia podemos coleccionar cualquier número (finito o infinito) de objetos que sean similares en el sentido de compartir una cierta propiedad común —la propiedad o complejo de propiedades expresada en la condición definitoria. No necesitamos disponer desnombres o denominaciones para esos objetos. Basta con que tengan la propiedad común mencionada. Un conjunto introducido mediante una condición necesaria y suficiente es un tzpo. Un tipo tiene una definición (la condición definitoria) y una esencia (las consecuencias de la definición). Todos sus miembros comparten tanto la propiedad definitoria como cuantas otras propiedades se sigan de ella. La manera recursiva de coleccionar las cosas es de algún modo intermedia entre la lista y la condición. En una definición recursiva primero hacemos referencia a uno o varios individuos iniciales y luego definimos una cierta relación de descendencia, de tal modo que los elementos del conjunto son los descendientes del (o de los) 2? Kircher, 1984, p. 129, 107

 individuo(s) inicial(es) por esa relación. Empezamos por indicar cierto individuo inicial o cierto grupo previamente especificado de individuos iniciales. Luego introducimos una relación binaria de descendencia, de tal modo que cuantos objetos estén en la extensión transitiva de esa relación con el (o con los) individuo(s) inicial(es) sean coleccionados en el conjunto. El conjunto así definido recursivamente es el mínimo conjunto que incluye a los individuos iniciales y está clausurado respecto a la relación binaria de descendencia. Como en el caso de la lista, los individuos así coleccionados no necesitan compartir ninguna propiedad específ1ca. Todo lo que necesitan compartir es cierta relación (la extensión transitiva de la de descendencia) con los elementos iniciales. Como en el caso de la condición necesaria y suficiente, no es necesario disponer de nombres para los objetos así coleccionados. Un conjunto introducido recursivamente de objetos así interrelacionalados constituye un linaje. Si el linaje es finito, puede representarse mediante un árbol o diagrama genealógico. . La teoría de conjuntos trata de conjuntos arbtirarios. La mayoría de los conjuntos arbitrarios no son listas, ni. tipos, ni linajes. La mayoría de los conjuntos arbitrarios no pueden ser definidos de modo alguno. (Recuerda que hay una infinidad supernumerable de conjuntos arbitrarios, pero sólo una infinidad numerable de posibles definiciones.) y | Con frecuencia agrupamos o las los trozos del mundo por sus similitudes percibidas o supuestas. $1 varios individuos son similares en algún respecto, tienen algo en común, comparten algo. Lo que comparten es una propiedad o forma. Comparten una propiedad, porque satisfacen la misma condición o criterio, porque pasan por el mismo filtro, porque caen bajo el mismo concepto. El concepto o criterio expresado en la condición necesaria y suficiente es un concepto tipológico, y la extensión de una concepto tipológico —el conjunto de todas las cosas a las que se aplica— es un tipo. A cada tipo de individuos concretos corresponde una cosa concreta, a saber, la cosa dispersa compuesta por todos los objetos de 108

 ese tipo. 51 consideramos cada individuo concreto como un conjunto de puntos espaciotemporales y formamos la unión de todos los conjuntos de puntos correspondientes a los objetos de ese tipo, obtenemos una nueva cosa concreta correspondiente al tipo entero, Cuando Ghiselin, Mayr y Hull hablan de clases, quieren decir tipos. Por ejemplo, Mayr escribe: «La pertenencia a una clase está determinada estrictamente por la similaridad, es decir, por la posesión de ciertas características compartidas por todos y solos los miembros de esa clase. Para ser incluidos en una clase determinada, los objetos deben compartir ciertas características que constttuyen los criterios de pertenencia o... propiedades definitorias» ?. Por tanto, cuando Ghiselin, Mayr y Hull han estado argumentando que una clase es algo opuesto a un individuo, lo que querían decir es que un tipo es lo contrario de un individuo. En efecto, un tipo no es lo mismo que un individuo, pero para cada tipo de individuos hay un individuo cuyas partes son precisamente los miembros de ese tipo. Otra cuestión distinta es la de si tal individuo es muy natural. En la mayoría de los casos, no lo es. Las definiciones recursivas son frecuentes en la matemática. Si ya disponemos del O y de la relación del siguiente, podemos definir el conjunto de los números naturales, N, mediante las dos cláusulas: (1) O pertenece a ÑN; (2) si x pertenece a My z es el siguiente de x, entonces z pertenece a NN, De este modo los números naturales no son definidos por la posesión de una propiedad común, sino por estar relacionados de cierto modo (y en cualquier número de pasos intermedios) con un objeto especificado, el 0. Los números naturales quedan así caracterizados como los descendientes del O por la relación de descendencia (o, mejor dicho, de precedencia). Las definiciones recursivas son también frecuentes en la gramática. El proyecto de la gramática generativa consiste en suministrar una definición recursiva del lenguaje, es decir, del conjunto de las oraciones gramaticalmente correctas de una lengua. También son 3 Mayr, 1987, p. 147. 109

A A A e A A AA e A A o a A o FA A A mm frecuentes en la informática, donde todos los lenguajes de programación están recursivamente definidos. Y en la lógica. Baste recordar cómo el conjunto de todas las fórmulas bien formadas de la lógica proposicional está definido recursivamente, como las hileras de signos obtenibles a partir del conjunto de las letras proposicionales mediante aplicaciones sucesivas de ciertas operaciones (negación, disyunción, etc.). Lo mismo sucede con el lenguaje de la lógica de primer orden. Desde luego, la aplicabilidad de las definiciones recursivas no está restringida a los campos de la lingiiística, la matemática o la ciencia de la computación. Supongamos que sabemos quiénes eran los doce apóstoles y que conocemos el proceso de ordenación episcopal. Entonces, y dando por sentada la doctrina eclesiástica al respecto, podemos definir el conjunto de los obispos del siguiente modo: (1) los doce apóstoles —aquí ponemos la lista: Pedro, Juan, Tomás... — son obispos; y (2) si x es un obispo y x* ordena episcopalmente a 2, entonces zes también un obispo. Definiciones similares pueden darse del conjunto de los cristianos (por la relación del bautismo) o del conjunto de los maestros Zen. Muchas corporaciones eligen sus miembros por cooptación, es decir, los nuevos miembros son elegidos por los antiguos. Ése es el caso, por ejemplo, de la Real Academia Española de la Lengua, cuyos miembros desde su fundación carecen de cualificación específica común alguna. El conjunto de sus miembros sólo puede ser caracterizado de un modo recursivo, indicando la lista de los miembros iniciales —-nombrados por el rey Felipe V— y describiendo el procedimiento de votación para cubrir las vacantes. Algo parecido ocurre con otras academias e Institutos. Especies y organismos como individuos y como conjuntos Una bioespecte, considerada como una cosa histórica (dispersa), es simplemente la suma o unión de sus organismos. No hay nada en la bioespecie aparte de los organismos que son sus miembros (o, si 110

BIOLÓGICA se prefiere, sus partes). También una multitud coincide con la suma o unión de la gente que la compone. El sistema formado por la Tierra y la Luna está en similar situación. Otros casos son diferentes. El organismo como individuo -———como región espactotemporal— es más que simplemente la suma o unión de sus células. También está compuesto por partes no celulares y no vivientes como el retículo inorgánico de los huesos, o el plasma de la sangre (que en su 90% es agua), o incluso las células muertas que componen el duramen (la madera dura en el centro del tronco de los árboles) o el pelo de los animales. Estos compuestos del organismo que no son células vivas son indispensables para su viabilidad y supervivencia y contribuyen a su cohesión e integración funcional. Por tanto, el organismo va más allá del conjunto de sus células de un modo en que la bioespecie no va más allá del conjunto de sus OTganismos. Una galaxia también es más que simplemente el conjunto de las estrellas de que consta (y de sus planetas). Las nubes intergalácticas de gas y polvo también son constituyentes importantes de la galaxia, como lo es con frecuencia su agujero negro central, En cualquier caso, y de hecho, el 90% de la masa de las galaxias se compone de la llamada materia oscura. Por ranto, la galaxia va más allá del conjunto de sus estrellas. Y los componentes extraestelares de la galaxia participan plenamente en el juego gravitacional que mantjene unida a la galaxia, (Si algo es un individuo, un organismo lo es. Los organismos son muy continuos en el espaciotiempo, son extremadamente cohesivos y sus partes interactúan obviamente de un modo estrecho. También poseen bordes nítidamente definidos. Un organismo está compuesto básicamente (aunque a veces no exclusivamente) de células. El conjunto S de las células de un organismo sexual puede definirse recursivamente del siguiente modo: (1) el zigoto que dio origen al organismo pertenece a S; (2) si x pertenece a S y xse divide por mitosis en zy 4, entonces 3 y w pertenecen también a S. 111

e TA AA A AA A ARA RR — > _ _ _ > A ————————

plicaciones sean necesarias para mantener su sistema de morfoespecies tan próximo y coincidente como sea posible con la historia filética real de las bioespecies. Si se descubre que dos presuntas especies se entrecruzan fecundamente en sus márgenes, ambas deben ser reclasificadas y reunidas como una única especie. Si dos especies gemelas (dos grupos casi indistinguibles morfológicamente pero que nunca se cruzan) se descubren, han de ser reconocidas como especies distintas en la taxonomía. El tipo, la morfoespecie, es como el síndrome de la bioespecie. Sus condiciones necesarias y suficientes son meros síntomas de la bioespecie. La definición recursiva es la definición más satisfactoria del taxón, la que mejor se adecua a los constreñimientos de la teoría evolutiva, pero no es operativa. Por eso necesitamos aproximaciones tipológicas en la práctica, Sí, las bioespecies son individuos, pero también determinan conjuntos de organismos. Los organismos son individuos indudables, pero sus células también forman conjuntos definibles recursivamente, Tanto las especies como los organismos pueden ser considerados como individuos (sul generis) y como conjuntos (aunque no meros conjuntos). Las principales diferencias entre las especies y los Organismos son: 1. La bioespecie como individuo — como región espaciotemporal— es simplemente la unión o suma mereológica de sus organismos. Sin embargo, el organismo como individuo —como región espaciotemporal— es más que la mera unión de sus células. También está compuesto de partes no celulares y no vivas. Incluso podríamos preguntarnos si los microbios que habitan los intestinos de las vacas y las termitas (sin los que éstas no podrían digerir la celulosa de la hierba y la madera de la que se alimentan) forman parte de las vacas y termitas que los hospedan. Y lo mismo podríamos preguntarnos respecto a nuestras propias bacterias intestinales, sín las cuales tampoco podríamos vivir. Desde el punto de vista de la interacción, hospedantes y huéspedes, simbiontes y parásitos con frecuencia forman sistemas unitarios interdepen114

 a _ _ er te A A dientes. En cualquier caso, el organismo va más allá del mero conjunto de sus células de un modo del que la especie no va más allá del conjunto de sus organismos. 2. La bioespecie es una entidad dispersa. El organismo es continuo. Y algunos sienten una tendencia intuitiva a considerar que un individuo disperso no es un individuo genuino, sino un dividuo. | 3. La cohesión interna e interacción mutua de sus partes es mucho mayor en el organismo que en la bioespecie. Mereología La mereología extensional clásica fue introducida por S. Lesniewski en 1916 y desarrollada por él en los años siguientes. Fue reformulada por H. Leonard y N. Goodman como cálculo de individuos en 1940. La mereología clásica es equivalente (isomorfa) al álgebra de Boole complera (sin 0, según algunos autores). $. Lesniewski, H. Leonard, N. Goodman, P. Simons y otros autores excluyen el individuo vacío, pero R. Martin, R. Carnap, M. Bunge y otros lo aceptan en sus sistemas mereológicos. De hecho, no hay razón para rechazar el individuo vacío como un individuo arbitrario, una vez que uno acepta partes impropias y sumas arbitrarias, por ejemplo. La mereología trata de la relación en que están las partes con el todo, la relación en que unos objetos están con otros cuando los primeros son partes de los segundos. Cualquier todo es parte de sí mismo. Y el objeto vacio es parte de cada todo. Una parte propia de un todo es una parte de ese todo distinta de la parte vacía y del todo mismo. La suma (mereológica) de dos objetos es el objeto constituido por la consideración de los dos objetos como un único objeto, que contiene como sus partes las partes de ambos. El producto mereológico o solapamiento de dos objetos está constituido por las partes que ambos objetos comparten. 115

KáíÁAXAAA A Un álgebra de Boole es un sistema (4, Ls, M,—, 0, 1), donde L. y MT son operaciones binarias en Á, — es una operación monaría en A, y O y 1 son elementos de A que satisfacen los siguientes axiomas: (D) xiuflyuz = (y Lx) Liz xMiynz) = (xp) nz (2) xiuy = yLix xny = yMx BG) mua = (inyu(ina xi(yna = (x.y) z) (4). xliex = l xx = 0 5) xuD = x l = > % Un álgebra de Boole induce un orden parcial E entre sus miembros de acuerdo con la definición: x = y S xLUy = y. Si Bes un subconjunto del universo A de un álgebra de Boole y si hay un ce Artal que para cada xe B,x LE c, decimos que c es una cota superior de B. El supremo de Bes la mínima de las cotas superiores de B (si la hay). Un álgebra de Boole es completa si cada subconjunto suyo tiene un supremo. Los axiomas de la mereología son los del álgebra de Boole completa, provistos de la siguiente interpretación: | x = y : xesuna parte de y xy : xesuna parte propia de y xy : suma mereológica o unión de xe y xMiy : producto mercológico o solapamiento de xe y 0 : el individuo vacío 1 : el individuo universal = x : el complemento de x, es decir, el individuo universal menos x La suma mereológica corresponde a la unión del álgebra de Boole, que es el supremo (o mínima cota superior) de dos miembros del álgebra. La mereología clásica acepta la suma mereológica de un número cualquiera de objetos, sin restricción alguna. Esta generosidad la convierte en un álgebra de Boole completa. Esta exi116

A a A OA KXÁA —Á ———-—= A gencia es muy fuerte y ha atraído muchas críticas, pues parece ir contra nuestras intuiciones de lo que es un individuo natural. Un átomo (en el sentido mereológico) es un objeto sin partes propias. La mereología clásica puede ser atomística o sin átomos. En la mereología atomística cada objeto se compone de átomos, un objeto es parte de otro si y sólo si todos los átomos del primero son átomos del segundo, y dos objetos son idénticos si y sólo si tienen los mismos átomos. La teoría resultante es muy simple y fluida. Por transposición del teorema de representación para álgebras de Boole, cada (realización de la) mereología atomística es isomotrfa al álgebra de los subconjuntos del conjunto de sus átomos (excluyendo sólo al conjunto vacío, caso de que trabajemos con una mereología sin objeto vacío). Las masas o materiales (en el sentido de las cosas a las que se refieren los nombres masivos como «agua», «aire» o «mantequiila») son realizaciones perfectas de la mereología clásica?. Hay una correspondencia entre las clases de individuos y los todos enteros compuestos de partes. Para cada clase de individuos hay una nueva cosa concreta, que es la suma mereológica de todos esos individuos, considerados como partes de la nueva cosa. Á la clase B=(b, ... b y corresponde la cosa entera 4 = LIB A Para cada cosa concreta compuesta (a cierto nivel) de partes hay una clase que tiene a esas partes como miembros. Á la cosa entera a=bL1... 116, corresponde la clase B=1(6,... b,). Una bioespecie es una entidad histórica, una cosa concreta; que se compone de sus miembros (los organismos de esa bioespecie) como partes. Esos organismos, considerados como individuos, son los elementos de la clase que es la extensión del concepto «... pertenece a la bioespecie». Desde luego, tanto el concepto como la clase se definen por referencia a la cosa concreta que es la bivespecie. Por otro lado, a cada clase de organismos le corresponde el todo concreto que es la suma mereológica de sus miembros (y que, en general, no es una bioespecie). | > Simon, 1987, p. 158. 117

-_ CONCEPTOS Y TEORÍAS EN LA CIENCIA A e e Si identificamos a un individuo concreto arbitrario con la región del espaciotiempo que ocupa, y a esta región con el conjunto de sus puntos, a cada individuo concreto x le corresponde el conjunto de sus puntos p(x). Entonces para cada clase Á de individuos concretos existe la cosa concreta |_|4, que ocupa la región del espaciotiempo U [pix eE A). La teoría de conjuntos trata de clases arbitrarias. Establece los constreñimientos que cualquier clase arbitraria debe satisfacer. Un tipo natural tiene que satisfacer esos constreñimientos y, además, otras condiciones suplementarias. La mayoría de las clases arbitrarias no son tipos naturales. (La mayoría de las sucesiones de letras no constituyen textos literarios, aunque cada texto literario sea una sucesión de letras.) Los individuos de los que trata la mereología son también individuos arbitrarios. Cada individuo natural tiene que satisfacer los constreñimientos de la mereología y, además, otras condiciones suplementarias. La mayoría de los individuos arbitrarios no son individuos naturales. Los subconjuntos arbitrarios de los tipos naturales o las intersecciones, uniones o diferencias arbitrarias de tipos naturales tampoco son, en general, tipos naturales. Lo mismo ocurre con los todos mereológicos y sus partes. Las partes mereológicas arbitrarias de un individuo natural no son, en general, individuos naturales. Y tampoco lo son las sumas, productos y diferencias mereológicas arbitrarias de individuos naturales. Las partes arbitrarias de un individuo pueden ser más o menos naturales. Una parte natural de un todo natural es una parte arbitraria de ese todo que es ella misma una entidad natural o entera (algo como una célula, o un órgano, o un organismo, o una población, o una molécula, o un lago, o una estrella). La idea de J]. Lovelock de Gaia como una entidad viviente puede ser fácilmente incorporada en la mereología. La biota (parte viviente de la biosfera) entera es como un gigantesco ser vivo, cuyas partes son las diferentes especies y comunidades. Es como si las diversas especies fueran tejidos diferentes, y las diversas comunidades, Órganos distintos. La biota puede ser considerada como el IIS

¡q_E_E KK tó NIT A A 08y € EA A q AAA AA individuo universal correspondiente a una mercología atomística, cuyos átomos son las células. “lodos los órganos, organismos, poblaciones, bioespecies y comunidades son partes de este individuo universal. Lo que no es intuitivo es el resultado de que las colecciones arbitrarias de células serían consideradas como partes genuinas u objetos. Esto podría ser evitado eligiendo una mereología más débil, sin sumas arbitrarias de objetos. Desde luego, eso ya no sería un álgebra de Boole, pero al menos seguiría siendo un orden parcial con un máximo (la biota). Antes de Darwin se consideraba que las especies son clases y que sólo sus miembros son individuos. Estas clases serían las extensiones de los correspondientes conceptos tipológicos, formas o esencias invariables y eternas (o creadas por Dios al principio). Pero desde Darwin sabemos que las especies surgen en un lugar y en un momento histórico dado por especiación (aislamiento reproductivo de una subpoblación), que carecen de esencia inmutable, pues el acervo génico de la población va variando continuamente, y que un día desaparecen (por bifurcación o extinción). Ghiselin, Hull, Mayr y otros muchos pusieron de relieve que las clases son entidades conjuntistas, invariables, eternas y que no ocupan posición alguna en el espaciotiempo, por lo que no se parecen en nada a las especies. Las especies nácen, van cambiando a lo largo del tiempo y finalmente mueren, como los individuos. Las especies son entidades históricas, espaciotemporalmente localizadas, como los individuos. Es cierto que son individuos dispersos, por lo que más bien merecerían ser llamados dividuos que individuos, pero en cualquier caso las bioespecies son cosas concretas, sistemas espaciotemporales, entidades poblacionales (en jerga de Mayr), sustancias primeras (en jerga aristotélica) y no sustancias segundas, no universales, no clases, ni conjuntos, ni formas, ni esencias, Por tanto, la consideración mereológica sustituye o complementa a la conjuntista: los organismos, que son sustancias individuales indudables, son partes de sus especies, que también son a su vez entidades concretas, al igual que lo son las células de que se componen los organismos. 119

Así como la teoría cuántica de campos es la manera de hacer compatible la mecánica cuántica con la relatividad especial, así también la consideración de las especies como sistemas históricos concretos es la manera de hacer compatible la sistemática biológica con la teoría de la evolución. 120

CAPÍTULO 5 MATERIA Y ATOMISMO

El concepto de materia no es un concepto científico, sino filosófico. No es un concepto primitivo ni derivado de ninguna teoría científica, como lo son, en cambio, los de masa, entropía, carga eléctrica y leptón. El concepto de materia fue introducido en la filosofía por Aristóteles. Este concepto aristotélico de materia fue abandonado en la edad moderna, en que la palabra "materia" pasó a designar lo que los antiguos habían llamado cuerpo, que para ellos era algo muy distinto. El atomismo corporeísta jugó un importante papel en el desarrollo de la ciencia en el siglo XIX y principios del XX, pero actualmente está en crisis (debido a su excesivo éxito, por así decir). En la confusa situación en que ahora nos encontramos quizá no esté de más echar una ojeada retrospectiva sobre el viejo concepto aristotélico de materia, que ya no nos parece tan desfasado como hace 100 años y que incluso quizá pueda arrojar un poco de luz (sólo un poco, desde luego) sobre algunas realidades y problemas de la actual física de partículas. Pero empecemos por el principio, es decir, por la etimología. 121

- CONCEPTOS Y TEORÍAS EN LA CIENCIA Etimología de “material La palabra latina mater, de inequívoco origen indoeuropeo, significa madre y se aplica tanto a los humanes como a los animales en general e incluso a las plantas. En este último caso —aplicada a las plantas y en especial a los árboles— mater designa el tronco principal del que brotan las ramas. De este sentido de mater deriva la palabra latina materia lo materies), que designa la sustancia de que está hecho el tronco y también el tronco mismo del árbol, por contraposición a la corteza y a las ramas. Éste es el sentido primigenio de matería en latín '. Puesto que es de la parte dura del árbol —el tronco libre de corteza y ramas— de donde se saca la madera que se emplea en carpintería y construcción, matería pasó a significar madera, en especial madera de construcción, en oposición a lignum, madera de quemar, leña. Los derivados latinos de materia se mueven en la misma órbita semántica. Así, materia críspa significa madera llena de vetas, y el verbo materzare significa construir con madera, de donde a su vez se derivan el adjetivo materiarias, de madera (materiarius faber es el carpintero, materiaria fabrica, la carpintería, etc.), y el sustantivo materiatio, obra de madera o carpintería. Como la madera era el principal material empleado en la construcción de muebles, casas, barcos, etc., la palabra materia acabó identificándose con material en general, como cuando Ovidio dice que el trabajo empleado en hacer una determinada obra valía más que los materiales en ella empleados, materíam superabat opus. Resumiendo podemos decir que en latín materia significa básicamente madera. Y aunque las palabras castellanas materia” y “madera significan actualmente cosas distintas, ambas tienen el mismo origen, pues ambas derivan de la marería latina. La palabra latina materia se empleó también para traducir la voz griega ÚAN y así pasaron a ella todas las connotaciones de esta ' Véase, por ejemplo, Á. Ernout y A. Meiller. Dictionnaire ¿tymologique de la langue latine. Histoire des mots, Libor. Klincksieck, París, 1967, p. 390, 122

MATERIA Y ATOMISMO q€qzEOz>->5_A RÁ A e A 1 A a e A A A A a a TI ll E DI última, que en parte ya poseía. En efecto, la palabra griega hAje —LAN— significaba primigeniamente árbol o bosque. Luego pasó a designar la madera que se saca del bosque, tanto la madera de construcción como la leña de quemar. Finalmente y por extensión hile pasó a significar no sólo la madera de construcción, sino en general todos los materiales de construcción, tanto la madera como la piedra, etc. Á partir de Aristóteles, que la incorporó a su terminología especializada, hjlé pasó a significar también material . en general, cualquier material. Pero hasta entonces había significado básicamente madera, leña, árbol o bosque. Ése es, por ejemplo, el único significado que tiene todavía en Platón. Incluso en su última obra, las Leyes, escrita mientras Aristóteles desarrollaba ya su propia filosofía, la palabra ÚA? sigue significando madera o leña. Así, Platón habla de la madera de construcción naval —-1Qumriynoíuns ÚvAnc—, de la leña bien seca — Any Enpav-——— para calentar los baños ?, etc. Y todos los numerosos compuestos derivados de hj/£ hacen referencia al bosque o a la madera: así, hylobios, que vive en el bosque; hylódromos, que corre por el bosque; hylotómos, leñador; bylofágos, comedor de madera, etc. Incluso en nuestro tiempo los zoólogos han dado al gibón (el primate de largos brazos especialmente adaptado a la vida arborícola en las junelas asiáticas) el nombre que servía de epíteto a Pan* Aylobates de DAOBA TNG, frecuentador de los bosques. El concepto aristotélico de materia La palabra materia —-—hjte— fue introducida en la filosofía por Aristóteles, con quien deja de designar un material o componente determinado de las cosas —la madera— para pasar a significar material o componentes en general, De hecho caracteriza la materia de dos maneras distintas: por un lado, como sustrato -—£fypo2 Platón: Leyes, 705 cl, ? Ibidem, 761 c7, 123

kéimenon—- del cambio entitativo, y por otro, como aspecto de la entidad. En el libro 1 de la Física Aristóteles analiza las condiciones o principios del cambio, que se reducen a tres: la ausencia previa de una cierta forma o determinación (antes del cambio), esa forma o determinación ya realizada (después del cambio) y el sustrato o sujeto del cambio, aquello en que el cambio se da, lo que permanece en el cambio y recibe la forma o determinación. Así cuando enjalbegamos una casa, el sustrato es la casa misma, que recibe la forma de la enjalbegadura, de que antes carecía. Se trata aquí de un cambio accidental. Pero en el cambio entitativo o sustancial, una cosa deja de ser lo que era para transformarse en otra entidad distinta. El pan y el pescado que comemos se transforman en carne y huesos nuestros. El lingote de bronce se transforma en estatua de Afrodita. La lana de la oveja se transforma en túnica. El sustrato de estos cambios entitativos es precisamente la materia. «Llamo materia —-define Aristóteles en la Física— al sustrato primero de cada cosa, a partir del cual se genera...% La observación de la actividad de los artesanos, que hacen sus obras con ciertos materiales, sugiere esta identificación de la materia como sustrato con el material. «Llamo materia — escribe Aristóteles en la Política— al sustrato a partir del cual se fabrica una obra, por ejemplo la lana para el tejedor y el bronce para el escultor”.» Aristóteles piensa que un solo tipo de explicación no puede dar cuenta de la diversidad y complejidad de los cambios o eventos naturales, sino que es necesario recurrir a cuatro tipos distintos de explicación, correspondientes a otros tantos aspectos que pueden distinguirse en las entidades: son las famosas cuatro aitiai o aspectos de la entidad. Dos aztíai o aspectos correlativos son los de materia —hjle— y forma —etdos o morphé.. La matería es un aspecto de la entidad, el aspecto en que nos fijamos cuando nos preguntamos por los materiales o componen3 Aristóteles: Physiké A,, 192231. > Aristóteles: Política, 1256 a 8. 124

MATERIA Y ATOMISMO A A A A A A A A A A A A A A A IN A a e e A A A A e tes de que está hecha o compuesta. En cada cosa Aristóteles distingue sus materiales o componentes ——su materia—, por un lado, y la estructura o composición que adoptan esos materiales o componentes en ella —su forma—, por otro. Así, la madera o el mármol son la materia de la estatua, la figura de Afrodita es su forma. Los ladrillos y vigas son la materia de la casa, su disposición en paredes, vanos y techos, su forma. ? El concepto aristotélico de materia es correlativo al de forma, La materia es siempre matería de algo. Y lo que es materia de algo puede, por su lado, en sí mismo, no ser materia, sino entidad completa, por cuya materia podemos a su vez preguntarnos. Los ladrillos y las vigas constituyen la materia de la casa. Pero un ladrillo es a su vez una entidad, cuya materia es la arcilla, y una viga es otra entidad, cuya materia es la madera. Á su vez la arcilla es una entidad cuya materia son ciertos elementos simples (agua, tierra, etc.). Como dice Aristóteles, «la materia es algo relativo, pues a otra forma distinta corresponde otra materia», Este concepto de materia no es absoluto, sino relativo: no indica una cosa o realidad determinada, sino un punto de vista desde el que mirar cualquier cosa o realidad, punto de vista correlativo al de forma o estructura. Todo compuesto es materia estructurada, pero lo que es materia respecto a esa estructura es forma respecto a su propia materia. Como ha señalado W. Wieland, «Aristóteles habla siempre de la materia sólo en cuanto que es materia de algo; en cuanto materia carece de propiedades determinadas. La” materia como realidad universal y unitaria es algo que no se encuentra en Aristóteles» ”, : J. Moravcsik ha señalado que el sentido de materia en Aristóteles es el de componente o, mejor dicho, el de conjunto de componentes, mientras que el de forma es el de estructura o ley de composición *. El ejemplo favorito de Aristóteles es el de sílaba. La 6 Aristóteles: Physiké A., 194 b 9. " Y Wieland: Die aristotelische Physik, Vandenhoeck 82 Ruprecht, Górringen, 1962, p. 140. 3]. Moravesik: «Aristotle on adequate explanations», Syhthese, vol. 28 (1974), pp. 3-17. 123

_ CONCEPTOS Y TEORÍAS EN LA CIENCIA a a materia de la sílaba son las letras de que se compone. Su forma o estructura, el orden en que esas letras están dadas. Toda entidad ———-con una sola excepción— es para Aristóteles un sinolon, un sistema compuesto de materia y forma, de componentes y estructura. Todos los objetos tienen materia, componenres. Los objetos sensibles tienen materia sensible —Ajle aistheté—, los objetos inteligibles, como los matemáticos, tienen materia inteligible —Ajlé noeté, Como dice Wieland, «no hay la' materia, sino sólo en cada caso una materia determinada» ?. Esa materia determinada puede incluso ser por así decir inmaterial, es decir, no sensible. Los puntos constituyen la materia del círculo; las letras son la materia de la sílaba; y las premisas son la materia del silogismo. En efecto, los círculos, las sílabas y los silogismos son sistemas estructurados y, por tanto, tienen materia, es decir, componentes. De todos modos, los entes que ocupan nuestra atención son preferentemente los cuerpos u objetos visibles, compuestos de materia sensible y estructura. Cuando decimos que la materia de Aes B, la de Bes C, la de Ces D, etc., llega un momento en que hemos llegado a los cuerpos más sencillos. Éstos son los elementos: agua, tierra, aire y fuego. Los elementos de Aristóteles coinciden con los de Empédocles, pero él los deduce de las dos oposiciones básicas que acepta: caliente-frío y húmedo-seco. Cada cuerpo simple tiene 2 de esas formas, una de cada oposición. Sus combinaciones posibles son 4: el aire (que tiene la forma caliente-húmedo), el fuego (que tiene la forma caliente-seco), el agua (frío-húmedo) y la tierra (frío-seco). No hay más posibilidades. caliente húmedo tierra 2 Y. Wieland: Ibidem, p. 211. 126

..— MATERIA Y ATOMISMO A A AA A A e e e e a A
Empédocles pensaba que los elementos eran inalterables, Pero los elementos aristotélicos pueden transformarse unos en otros. Así, cambiando una de sus formas (húmedo por seco), el aire se transforma en fuego. Incluso es posible (aunque más difícil) que un elemento cambie sus dos formas, como cuando el agua se transforma en fuego. Ahora bien, en todo cambio ha de haber un sustrato que permanezca y reciba la nueva forma. ¿Cuál es el sustrato que permanece en las transformaciones entre elementos? La materia primera —próté hjle—, que carece de forma y, por tanto, no puede existir independientemente, sino sólo adaptando una de las formas elementales: atre, fuego, agua o tierra. La matería de algo, en cuanto tal materia, es siempre incognoscible. Sólo es cognoscible en cuanto provista a su vez de forma, pues la forma es lo único que podemos conocer. Pero la materia primera carece por completo de forma. Por ello es por completo incognoscible, pues no hay en ella nada que conocer. El mundo de Aristóteles es el mundo expertencial, vivencial, de las cosas con que cotidianamente nos topamos. Estas cosas cambian y sólo podemos entender su cambio distinguiendo en ellas aspectos distintos, considerándolas desde distintos puntos de vista. Los conceptos aristotélicos de materia y forma no se refieren a realidades absolutas, sino a puntos de vista que en cada casg enfocan algo distinto, puntos de vista que se obtienen por reflexión de sentido común sobre la práctica lingiística cotidiana. Distinto es el caso del concepto de cuerpo, que en la filosofía antigua jugó un papel muy diferente del de materia. Etimología de “cuerpo La palabra castellana “cuerpo” viene del latín corpus, que primariamente significa el cuerpo del animal, y en especial del humán, por contraposición a su vida o actividad vital. De ahí que se utilizase también para designar el cuerpo inerte o sin vida, el cadáver. Precisamente del significado de corpus como cuerpo muerto se deriva el 127

 la AD rt lA MOP OA MA e SL O PATA AA o inglés corpse, cadáver. Esta acepción fue reforzada por el uso de corpus como traducción latina del término griego OWUua. En griego antiguo sóma —owua— empezó significando cuerpo muerto, cadáver; ése es, por ejemplo, el único significado que la palabra tiene en Homero *". Luego pasó a significar también cuerpo vivo —de donde deriva el adjetivo castellano «somáticoo—, y así aparece ya en Hesíodo *'. Empédocles y los atomistas -—Leucipo y Demócrito— fueron los primeros que emplearon sóma en el sentido de cuerpo físico en general, sentido que luego recogería también Aristóteles: «el cuerpo es lo limitado por una superficie» **, es decir, el continuo tridimensional, el sólido, que, como tal, cae bajo la categoría de la cantidad continua, como la línea o la superficie *, El atomismo especulativo Algunos filósofos griegos, como los atomistas y los estoicos, defendieron la tesis del pansomatismo o corporeísmo universal, es decir, la tesis de que todas las entidades son cuerpos. Para Platón, por ejemplo, había muchas entidades (las formas subsistentes, las entidades matemáticas, los dioses, las mentes humanas, etc.) incorpóreas. Esto es lo que niegan los corporeístas. No hay nada incorpóreo. lodo es cuerpo. Un tipo especial de corporeísmo es el atomismo. Parménides había sentado la tesis de que lo único que existe es lo existente y que lo existente es homogéneo, eterno, ingenerable, inalterable, indestructible, único y continuo. De ahí se seguía la paradójica conclusión de que la aparente multiplicidad y cambio que observamos en el mundo es meramente ilusoria. Los razonamientos empleados por Parménides y sus seguidores, aunque invá'* Por ejemplo, Homero: Híada, 3,23 y 7,79. * Por ejemplo, Hesíodo: Los trabajos y los días, 540. 12 Aristóteles: Physiké A, 204 b 5. 13 Aristóteles: Categorías, 4 b 24. 128

__ MATERIA Y ATOMISMO A A a a —__—_—_—_—_— A ——_—_ A A A ÁKÁKÁKÁK

AAA A AS de los cuerpos componentes en la explicación de las propiedades y funcionamiento del sistema compuesto. Aristóteles, por el contrario, ponía el énfasis en la estructura que adoptaban los componentes como principio de explicación. Las diferencias básicas de fondo eran dos; (1) Según los atomistas hay (o es posible) un análisis definitivo y absoluto de los cuerpos complejos en cuerpos últimos simples y permanentes. Según Aristóteles no hay (y no es posible) un tal análisis, sino sólo un análisis provistonal y relativo en componentes y estructura. (2) Según los atomistas los cuerpos más simples (los átomos) son eternos e inalterables, no estando sometidos a más cambio que el meramente local, mientras que para Aristóteles incluso los cuerpos más simples (los elementos) son alterables y destruibles, pues están sometidos al cambio entitrativo, transformándose en determinadas circunstancias unos en Otros. Mientras que Aristóteles se había limitado básicamente a anallzar y sistematizar los puntos de vista desde los que se pueden considerar las cosas, Leucipo y Demócrito habían propuesto una tesis física y metafísica audaz y omniabarcadora. En cualquier caso y durante los 2000 años siguientes, ninguna de las dos filosofías hizo la más mínima contribución al desarrollo de la ciencia física. La ciencia física se constituyó en el siglo XVH frente a la oposición del aristotelismo esclerótico y dogmático de las universidades. No es de extrañar por eso que acogiera con gran simpatía la antigua filosofía atomista, como más adecuada para servir de telón de fondo a la nueva empresa intelectual. El aromismo antiguo, ligeramente corregido para hacerlo compatible con el cristianismo, sirvió de ideología filosófica dominante en la incipiente comunidad científica. Esto no vale sólo para los resucitadores explícitos del atomismo, como Pierre Gassendi, sino incluso para los creadores de la física, y en especial para Newton. Recordemos el siguiente pasaje de la Óptica de Newton: «Tras considerar todas estas cosas, me parece muy probable que Dios haya creado desde el comienzo la materia en forma de partículas sólidas, masivas, duras, impenetrables y móviles, con tales tamaños y figuras, con tales otras pro130

- MATERIA Y ATOMISMO A A A AAA q A AA AA A A A ——————— A pe piedades y en una proporción tal al espacio que resulten lo más apropiadas al fin para el que fueron creadas. Estas partículas primitivas, al ser sólidas, son incomparablemente más duras que cualesquiera cuerpos porosos formados a partir de ellas. Tan duras, incluso, como para no gastarse mi romperse nunca en pedazos, pues ningún poder ordinario es capaz de dividir lo que el mismo Dios ha hecho uno en la primera creación... Puesto que la naturaleza ha de ser perdurable, los cambios de las cosas corpóreas han de ser atribuidos exclusivamente a las diversas separaciones y huevas asociaciones de los movimientos de estas partículas permanentes...» . Sí dejamos de lado las alusiones a la creación divina, Newton nos presenta aquí un resumen perfecto de la tesis atomista, El atomismo científico El atomismo tan entusiastamente abrazado por muchos científicos de los siglos XVI y XVII! no pasó nunca de ser una mera especulación filosófica sin ningún tipo de apoyo empírico y aceptada en función de su sola plausibilidad intrínseca. El atomismo deja de ser especulativo para convertirse en una hipótesis científica a principios del siglo XIX y no por obra de los físicos, sino de los químicos. Los químicos mezclan diversas sustancias simples (o elementos) para obtener otras compuestas. Á partir de Lavoisier, los químicos empezaron a medir cuidadosamente la cantidad de cada sustancia utilizada o resultante. Y estas mediciones fueron las que proporcionaron una base empírica creciente a la hipótesis atomista. El químico francés J]. L. Proust evitó las turbulencias de la Revolución francesa y el Directorio dedicándose a la investigación en Madrid, donde fue generosamente protegido por Carlos IV. En 1799 Proust logró probar con toda precisión que el carbonato de cobre contiene 14 1, Newton: Óptica, libro TH, parte 1, pp. 345-346 de la traducción o po Aa los Solís, Ed. Alfaguara, Madrid, 1977. 131

A mo —. proporciones exactamente fijas (en cuanto al peso) de carbono, oxígeno y cobre, En la reacción que da lugar al carbonato de cobre siempre intervienen exactamente 5,3 partes de cobre y 4 partes de oxígeno por cada 1. parte de carbón. Proust multiplicó los experimentos y observaciones y llegó a formular la ley de Proust o ley ae la proporción definida, que dice que todos los compuestos tienen proporciones definidas y fijas de sus elementos componentes. Después de una polémica con Bertholler, resultó que Proust tenía razón. Y la única explicación razonable de la ley de la proporción definida era la hipótesis atómica. En efecto, si los compuestos químicos eran moléculas formadas por átomos de los elementos, puesto que los átomos son trozos indivisibles e inalterables, la proporción en peso de los componentes sería siempre exactamente la misma. Si una molécula del compuesto y se formaba de dos átomos de x y cinco átomos de z, y el átomo de x pesaba el doble que el de 2, se necesitarían cuatro partes (en peso) de la sustancia x por cada cinco partes (en peso) de la sustancia z para producir y. El químico inglés John Dalton descubrió que los mismos elementos químicos pueden combinarse de más de una manera, pero entonces las distintas combinaciones obedecen a proporciones definidas completamente distintas, correspondientes a sencillas relaciones entre números enteros, y dan lugar a sustancias diferentes. Así, podemos combinar tres partes (en peso) de carbono con ocho partes de oxígeno para obtener dióxido de carbono. Pero también podemos combinar tres partes de carbono con cuatro partes de oxígeno, obteniendo de este modo monóxido de carbono. Es decir, con la misma parte de carbono podemos combinar partes de oxígeno tales que la una es el doble de la otra. Esto es fácilmente explicable en función de la hipótesis aromista. En efecto, si el monóxido de carbono consta de moléculas formadas por un átomo de carbono y un átomo de oxígeno y el dióxido de carbono consta de moléculas formadas por un átomo de carbono y dos átomos de oxígeno y el peso de un átomo de oxígeno es 4/3 del peso de un átomo de carbono, entonces trivialmente resulta que para formar monóxido o dióxido de carbono hay que combi132

 A o nar pesos de oxígeno y carbono en las proporciones observadas. En 1803 Dalton generalizó estos resultados en su ley de las proporciones múltiples. En 1808, finalmente, Dalton publicó A net system of chemical philosophy, en que se introduce la hipótesis atomista como la única que da cuenta de las leyes cuantitativas de la química entonces conocidas, como las de proporción definida y de proporciones múltiples, recién mencionadas. Con esta obra el atomismo se convierte en una teoría científica (de la química). El proceso de sentar la química sobre bases atomistas culmina con la tabla periódica de los elementos, publicada hacia 1870 por Meyer y Mendeléyev. Desde entonces sabemos que los diversos compuestos químicos no son sino moléculas formadas por los átomos de sus elementos componentes y que cada elemento químico corresponde a un tipo característico de átomos básicamente iguales, En las reacciones químicas cambian los compuestos, las moléculas, las combinaciones de átomos, pero los átomos mismos permanecen inalterados, indivisibles y eternos, como los átomos de Demócrito. Precisamente la ley de conservación de la masa, formulada por Lavoisier y base de toda la química del siglo XIX, era ahora interpretada como la expresión cuantitativa de la inalterabilidad de los átomos. Animados por la nueva respetabilidad científica proporcionada al atomismo por la química, los físicos se tomaron más en serio la hipótesis atomista. Consecuencia importante de ello fue el desarrollo de la termodinámica estadística o teoría cinética de los gases -—debido a Maxwell, Boltzmann y Gibbs—, en que las magnitudes fenomenológicas como la temperatura se interpretan como resultantes de los movimientos de los átomos y moléculas, en este caso como su velocidad media. A principios del siglo XX ya nadie duda de la verdad del atomismo *, Los últimos incrédulos se convierten (W. Ostwald, 1908) o se mueren (Ernst Mach, 1916). % El proceso de aceptación gradual y creciente de la existencia de los áromos por la. comunidad científica durante el siglo XIX se encuentra expuesto en R, M. Gardner: «Realism and instrumentalism in 19th-century atomism», Philosophy of Science, vol. 46 (1979, pp. 1-34, | 133

. CONCEPTOS Y TEORÍAS EN LA CIENCIA La relativización del atomismo Todos los cuerpos que observamos son sistemas o conglomerados de otros cuerpos, y eso ya lo sabía Aristóteles. La gracia y la originalidad del atomismo consistían en postular unos cuerpos últimos, unos cuerpos simples, eternos, inalterables, indivistbles y carentes de estructura interna, que serían los componentes de todos los demás. La existencia de los átomos establecida por los químicos del siglo XIX es un hecho archicomprobado y que ya no podrá ponerse nunca en duda. Pero conforme los físicos han ido estudiando esos átomos químicos, la hipótesis atomista original se ha ido viniendo abajo hasta quedar total. mente arrinconada. Desde luego que hay átomos químicos. Pero éstos no son los cuerpos últimos, simples y carentes de estructura que había postulado el atomismo. Los átomos químicos son cuerpos estructurados, compuestos a su vez de (en terminología aristotélica) materia (sus componentes) y forma (la estructura que adoptan esos componentes en el átomo). A partir del descubrimiento de los rayos catódicos (corriente eléctrica en el vacio) en 1875, de los rayos X en 1895 y de la radiactividad en 1896, se fue viendo claro que la concepción atomista del mundo. físico era demasiado simplista. En 1897 3. Thomson descubrió el electrón como partícula de rayo catódico. En 1907 se descubrió el protón o partícula de rayo positivo. En 1911 R. Millikan logró medir exactamente la carga eléctrica y la masa del electrón. Y ese mismo año Rutherford presentó la primera hipótesis sobre la estructura interna del átomo: el átomo sería una especie de sistema planetario en miniatura, donde diversos electrones, ligeros y con carga eléctrica negativa, giran a modo de planetas en torno a un núcleo pesado y cargado positivamente, que desempeña el papel de sol. Dos años después, en 1913, Niels Bohr refina la hipótesis de Rutherford, incorporando a ella la cuantificación de la energía, descubierta por Max Planck en 1900. 134

MATERIA Y AFOMISMO + - d a .. A e es sa A ro Los átomos tenían, pues, estructura, pero está estructura no correspondía a las previsiones de la mecánica newtonlana. Para dar cuenta del comportamiento de los electrones en el interior del átomo fue preciso desarrollar (entre 1924 y 1927) una nueva mecánica, la mecánica cuántica, Hacia 1930 se sabía que el átomo es un sistema compuesto de un núcleo positivo y electrones negativos y se disponía de una teoría adecuada de su estructura interna: la mecánica cuántica. ¿No resultaría a la postre que los viejos atomistas tenían razón, sólo que los cuerpos simples últimos no serían los átomos, sino los electrones, los protones y los fotones? En 1932]. Chadwick descubrió el neutrón y Heisenberg propuso que las partículas de rayos a (núcleos de helio) constan de 2 protones y 2 neutrones. Ese mismo año se descubrió el positrón, antipartícula del electrón (es decir, exactamente igual que el electrón pero con carga eléctrica de signo contrario). Á partir de entonces, y hasta ahora, cada año se han ido descubriendo nuevas partículas. En 1961 Gell Mann y Neeman propusieron su camino de ocho sendas (ezghifold-way), una especie de tabla periódica para clasificar las aproximadamente 30 partículas hasta entonces descubiertas (y con las que no se sabía bien qué hacer) segúr*su carga eléctrica, su masa y su extrañeza (un número cuántico introducido en 1956 por Gell Mann a fin de explicar la lentitud relativa con que ciertas nuevas partículas se desintegraban). En 1963 Gell-Mann y Zweig propusieron la hipótesis e los quarks para introducir orden y simplicidad en la selva de las nuevas partículas. “Todos los hadrones (partículas que experimentan las interacciones fuertes) serían combinaciones de quarks, de los cuales habría tres tipos: up, down y strange. Así, por ejemplo, el protón es una combinación de dos quarks del tipo xp y un quark del tipo down (u u d), mientras que el neutrón es una combinación de un quark del tipo 4p con dos quarks del tipo down (u d d).. Lo que nos interesa subrayar es que los cuerpos simples últimos y sin estructura de los atomistas cada vez se nos escurren más de 135

 entre las manos. Resulta que los átomos son sistemas estructurados de núcleo y electrones. Pero resulta luego que el núcleo es a su vez un sistema estructurado de protones y neutrones. Y ahora resulta que los protones son a su vez sistemas estructurados de quarks. ¿Cuáles son los verdaderos átomos? ¿Los átomos químicos, los núcleos, los protones, los quarks? La respuesta depende de la fecha en que se formule la pregunta. Lo que está claro es que la noción de átomo queda así relativizada y va pareciéndose a la noción aristotélica de materia, que, como vimos, es siempre relativa, materia de algo. Como ha señalado el físico americano Victor Weisskopf en su discurso de ingreso en la Académie de Sciences de París en noviembre de 1979, no podemos estar seguros de que los quarks sean los últimos componentes del mundo físico, que incluso podría tener estructura de juego de muñecas rusas. Una muñeca rusa está hueca y puede abrirse por el medio, separando la parte superior de la inferior. Pero dentro de ella hay otra muñeca rusa de tamaño algo menor, que también puede abrirse, con lo que en su interior encontramos una tercera muñeca rusa, de tamaño menor al de la segunda, etc. ¿Cuántas muñecas rusas incrustadas unas en otras nos encontraremos en nuestra exploración del mundo físico? ¡Quién sabe! incluso es posible que esa situación se repita indefinidamente. Cuanto más penetramos en el micromundo, más exótlco y asombroso es todo y más profunda es nuestra ignorancia y nuestra falta de intuición. Recordatorio de la situación actual Lo que actualmente creemos saber sobre los componentes últimos de la realidad física es lo siguiente. Las partículas elementales o últimas son de tres clases: leptones, quarks y mediadores. Leptones y quarks forman los componentes últimos de los sistemas físicos. Y la estructura de esos sistemas depende de cuatro fuerzas fundamentales, mediadas por los mediadores. 136

MATERIA Y ATOMISMO E E Y Y O E O E Los leptones actualmente conocidos son de 12 tipos: electrones (descubiertos en 1897), muones (descubiertos en 1936), tauones (descubiertos en 1975-77), neutrinos electrónicos (descubiertos en 1953), neutrinos muónicos (descubiertos en 1961) y neutrinos tauónicos (descubiertos en 1975-77), así como sus correspondientes antipartículas: antielectrones o positrones [descubiertos en 1932), antimuones, antitauones, antineutrinos electrónicos, antineutrinos muónicos y antineutrinos tauónicos. Todos los leptones tienen en común el tener 1/2 h de spin y el ser insensibles a la interacción fuerte. Los quarks actualmente conocidos son también de 12 tipos: up, down y strange (postulados en 1963 por Gell-Mann y Zweig), charmed (postulado por Glashow y exigido por el descubrimiento del mesón Y en 1974, descubrimiento que valió a Richter y Ting el premio Nobel de física de 1976), top y bottom (exigido el segundo por el descubrimiento del mesón Y en 1977 y postulado el primero por razones de simetría), así como sus correspondientes antipartículas: antiup, antidown, antistrange, anticharmed, antitop y antibottom. Los quarks son sensibles a la interacción fuerte y han sido postulados como componentes de los aproximadamente 200 hadrones conocidos: los bariones se componen de tres quarks, los antibariones de tres antiquarks y los mesones de un quark y un antiquark, Por ejemplo, el mesón Tr* se compone de un quark del tipo up y un antiquark del tipo antidown (u d). El mesón Y, descubierto en 1974 por Richter y Ting, es una combinación de quark y antiquark encantados o charmed (cc). El mesón Y, descubierto en 1977 por Lederman, es otra combinación de quark y antiquark, bottom y antibottom (b b). Las fuerzas básicas que determinan la estructura de los sistemas formados por leptones y quarks son cuatro: la gravitatoria, la débil, la electromagnética y la interacción fuerte (por orden de intensidad creciente y alcance decreciente). Teorías recientes postulan que todas estas interacciones se basan en la emisión y absorción de un tipo especial de partículas: los mediadores. Los mediadores de la interacción electromagnética son los bien conocidos 137

. CONCEPTOS Y TEORÍAS EN LA CIENCIA A A fotones, objeto de la electrodinámica cuántica. Los mediadores de la interacción débil son los tres bosones intermediarios W*, W" y Z*, objeto de la teoría de Salam-Weinberg, que da un tratamiento unificado a las interacciones electromagnética y débil (y por la que Weinberg, Glashow y Salam recibieron el premio Nobel de física de 1979). La existencia de estos tres bosones intermediarios fue experimentalmente comprobada en el CERN en 1983. Los mediadores de la interacción fuerte son ocho g/uones lobjeto de la cromodinámica cuántica). Los mediadores de la interacción gravitatoria son los gravitones, postulados por la teoría de la relatividad general y las teorías de la supergravitación, aunque por ahora han eludido toda comprobación experimental, Todas estas entidades son postuladas por teorías que tratan de explicar lo que ocurre en los aceleradores de partículas. En estos aceleradores las partículas se aceleran hasta que adquieren una eran masa-energía. A velocidades próximas a la de la luz se hacen chocar unas partículas con otras, con lo que éstas se aniquilan y otras nuevas de igual masa-energía son creadas. Estas aniquilaciones y creaciones son el pan nuestro de cada día de la física de partículas. Así, el mesón Y (ypsilon) se produjo primero colisionando protones en el laboratorio Fermi, de Chicago, en 1977, y luego colisionando electrones y positrones en el acelerador Petra, de Hamburg. De nuevo Aristóteles El atomismo clásico es insostenible. En efecto, lo esencial de la hipótesis atomista clásica es que hay cuerpos simples inalterables, ingenerables e indestructibles, sean éstos los que sean. Pero eso no es cierto. Los únicos candidatos actuales a cuerpos simples últimos serían los leptones y los quarks. Y en los aceleradores de electrones, por ejemplo, cada día se aniquilan electrones y positrones por millones, y se crean hadrones (y, por supuesto, quarks) también por millones. De esto al menos podemos estar seguros: ninguna de 138

 las partículas hoy conocidas o postuladas es ingenerable o indestructible. Todas pueden aniquilarse o crearse (aunque sólo según ciertas leyes y condiciones, claro). La materia de la que trata la actual física de partículas no incorpora los postulados de la teoría atomista clásica, pues sus cuerpos últimos no se limitan al cambio local, sino que están también sometidos al aumento o disminución (por ejemplo, de masa) e incluso al cambio entitativo, aniquilándose, creándose y transformándose unos en otros. Bien es cierto que estas aniquilaciones y creaciones no son arbi-trarias, ya que satisfacen ciertos principios de conservación de números cuánticos y de simetría. Pero esto no palía en absoluto las dificultades de la visión atomista '*. K. Schrader-Frechette predijo '" una crisis general del paradigma atomista y de la concepción corriente de que la materia está compuesta de partículas elementales. «Quizá —escribe—— no tenemos más razón para decir que la materia está compuesta de partículas elementales que para decir que no lo está. Y por tanto, quizá, no tenemos más razón para prestar nuestra adhesión al paradigma de las partículas elementales que para no prestársela **.» Schrader-Frechette cree que este paradigma ya hace aguas y va a hundirse, pero no sabe decir qué lo sustituirá. Su crítica parece exagerada y poco convincente, pero es sintomática de la insatisfacción por la concepción atomista tradicional. ¿Qué permanece en las aniquilaciones y creaciones de partículas, además de la conservación de ciertos números cuánticos? ¿Qué sirve de sustrato a esas generaciones y destrucciones? No, desde luego, algo parecido a los átomos democríteos. Más bien algo parecido a la materia primera de Aristóteles. Patrick Suppes ha 'é Incluso puede considerarse que el concepto actual de partícula ya no responde en absoluto al parrón atomista, Después de escuchar la presente ponencia, Mario Bunge me comentaba que «la física de campos refutó el atomismo, aunque no las hipótesis atómicas (físicas y químicas)... Las “partículas” cuánticas no son partículas de estilo clásico, sino zonas de campos de densidad muy grande». 1% E Sclirader-Frechetre: «Átomistm in crisis: an analysis of the current high energy paradigm», Philosophy of Science, vol. 44 (1977), pp. 409-440. 'E Tbídem, p. 411. 159

escrito: «Las colisiones de electrones y otras partículas para producir nuevas partículas, tal como se observa, por ejemplo, en las cámaras de burbujas y en otros experimentos, constituyen simplemente un buen apoyo para la noción aristotélica de cambio de forma de la materia. Los datos de la cámara de burbujas apoyan especialmente la definición de materia de Aristóteles... En resumen, la situación parece indicar que la teoría de la materia de Aristóteles proporciona una manera excelente de considerar tanto los fenómenos de la física de altas energías como el tipo de fenómenos macroscópicos en que se fijaba Aristóteles» *". Ni siquiera la vieja teoría aristotélica de los elementos nos parece ya tan extraña. Comparémosla con la actual teoría de los quarks. Los oTroLxeta o elementos de Aristóteles corresponden a los tipos (o sabores, favours) de quarks. Las evavTiwOeLc u aoposiciones pueden compararse a las cargas o números cuánticos de los quarks. En la teoría de los quarks, a partir de los números, cargas o propiedades cuánticas consideradas se deducen todas las combinaciones posibles, que serán los tipos aceptables de partículas, En la teoría aristotélica de los elementos, a partir de las dos oposiciones (números, cargas o propiedades cuánticas, casi diría uno) que reconoce, la térmica (caliente (+), trío)) y la hidrónica (húmedo (+), seco ()), se deducen todas las combinaciones posibles, que serán los elementos aceptables. Los elementos pueden transformarse unos en otros, cambiando sus cargas (térmica e hidrónica), lo mismo que las partículas pueden transformarse unas en Otras, etc. A la teoría aristotélica de la materia y la forma como aspectos de todas las cosas corresponde la actual tendencia a considerar las cosas como sistemas, es decir, como universos o conjuntos de elementos (la materia), provistos de estructura (la forma). La teoría de un tipo de cosas consiste precisamente en la caracterización de su común estéuctura. Y, evidentemente, los elementos del univer'>

P Suppes: «Aristotles concept of matter and its relation to medern concepts of matter», Syathese, vol, 28 (1974), pp. 46-47, 140

so de un sistema pueden a su vez ser sistemas, conjuntos estructurados, La relatividad de las nociones sistémicas se corresponde bien con la relatividad de las nociones aristotélicas. Todas las realidades que conocemos se componen de materia y estructura. El materialismo y el estructuralismo son puntos de vista complementarios. El estructuralismo puro, como el de Platón, olvida que una estructura siempre es estructura de algo. Y el materialismo puro es irremediablemente ingenuo y apenas ha sido sos- . tenido, pues incluso los atomistas clásicos reconocían que los cuerpos complejos eran conglomerados estructurados de componentes atómicos. La diferencia * entre Aristóteles y los atornistas clásicos era en gran parte una cuestión de énfasis. Y conforme la ciencia de nuestro tiempo ha ido poniendo más énfasis en la estructura que en los componentes, en los principios de conservación de números cuánticos y simetrías que en las partículas conservadas, las viejas nociones aristotélicas han ido ganando nueva actualidad, No exageremos: los detalles de la filosofía aristotélica no tienen nada que ver con la ciencia actual. Las complejas estructuras matemáticas de nuestra física teórica se parecen bien poco a las formas cualitativas en que pensaba Aristóteles. Pero su concepto de materia podría estar más próximo a la física de hoy que las concepciones del atomismo clásico. % Naturalmente entre Aristóteles y los atomistas había otras diferencias además de las aquí señaladas. Por ejemplo, el mundo físico aristotélico era un continuo, mientras que el de los atornistas se reducía a partículas discretas, separadas por un vacío absoluto. Es evidente que en roda la historia de la física ha habido rendencias continuistas (teorías de campos) y tendencias corpusculares, reflejadas en nuestro siglo en las distintas visualizaciones del electrón como onda o como corpúsculo. Pero el tema es demasiado complicado para tratarlo aquí. En cualquier caso, la versión actual de la mecánica clásica —la teoría cuántica de campos— más bien excluye el vacio absoluto de los atomistas clásicos. 141

CAPÍTULO 6 KANT COMO FILÓSOFO DE LA CIENCIA

Motivación de Kant La filosofía de Kant, como la de Platón, responde a una doble motivación, teórica y práctica. La preocupación teórica de ambos pensadores es la misma: salvar y justificar la ciencia. La práctica es distinta: salvar y justificar el orden político-social, en Platón; salvar la moralidad y religiosidad pietista, en Kant. En una época de aguda crisis social, subsiguiente a la derrota de Atenas en la guerra del Peloponeso, Platón trataba de salvar el ideal aristocrático de gobierno de la polís. Y frente al escepticismo y relativismo de los sofistas, trataba de salvar la posibilidad de un saber riguroso y absoluto, de la ciencia, introduciendo para ello su famosa doctrina de las formas. Porque eso al menos estaba claro para Platón: hay que defender la ciencia a toda costa. «Hay que combatir con todas las fuerzas de la argumentación a quien sustente tesis que impliquen la abolición de la ciencia, del saber, del intelecto, cualesquiera que sean esas tesis ?.» Kant había crecido en el seno de una familia numerosa y humilde, donde, según su propio testimonio, nunca vio ni oyó ' Plarón: Sofistes, 249b, c. 143

 nada que no fuera conforme a la honradez, la decencia y la veracidad. Su padre sentía horror de la mentira. Su madre era una mujer extraordinariamente piadosa, que le dio una firme educación moral y lo inscribió en el Collegium Fridericianum (dirigido por el pietista Albert Schulz), al que Kant asistió durante ocho años. Finalmente su principal profesor de filosofía en la Universldad de Kónigsberg, donde estudió, fue Martin Knutzen, también un pietista. El pietismo era un movimiento que rechazaba a los clérigos, las instituciones eclesiásticas y los dogmas, pero que insistía en el sentimiento religioso, en la fe interior y en el cumplimiento de deber. Á la defensa de esa religiosidad intimista y no dogmática y de esa moralidad rigurosa dedicaría Kant una parte. muy importante de su filosofía. La otra parte —que es la que aquí nos interesa— la dedicaría a defender y justificar la ciencia. Esta justificación parecía tanto más necesaria cuanto que los recientes análisis y críticas escépticas de Hume parecían haberla dejado en entredicho. En la universidad estudió Kant matemáticas y física, además de filosofía. La física, primero la de Leibniz y luego la de Newton, le impresionó vivamente. De hecho Leibniz y Newton son los dos autores que Kant más veces cita en sus obras. Y «un Newton» es para Kant el paradigma de máxima inteligencia (a veces contrapuesto a «un hotentote»). A la justificación de la mecánica newtoniana (y de la geometría euclídea) dedicaría Kant la parte teórica de su filosofía. Analítico y sintético Como es bien sabido, Kant divide las proposiciones (o juicios) en analíticas y sintéticas, por un lado, y en a priori y a posteriori, por otro. Las proposiciones analíticas carecen de contenido fáctico, no dicen nada nuevo, son hueras, vacías, meras tautologías. Las sintéticas poseen contenido fáctico, dicen algo, son informativas. Las proposiciones a priorí son universales y necesarias y su validez es

A A cognoscible con independencia de la experiencia. Las a posteriori son contingentes y particulares, y sólo la experiencia permite contrastar su verdad o falsedad. - Si las leyes de la matemática y la física fueran analíticas, serían poco interesantes y poco informativas, aunque eventualmente seguras. Si esas mismas leyes fueran a postertorí, serían inseguras y contingentes, aunque eventualmente informativas. Pero Kant quiere que las leyes de la matemática y de la física sean todo lo formidables que una proposición pueda ser, quiere que sean a la vez sintéticas (es decir, informativas) y a priori (es decir, seguras). Para Kant es evidente que las leyes de la matemática y de la física son sintéticas a priorí. Eso es para él un punto de partida, una posición a defender, un dato a explicar. Kant no se pregunta sz las leyes de la matemática y la física son sintéticas a priori. Sólo se pregunta cómo es posible que lo sean, de qué manera tenemos que estar hechos nosotros para que nuestras leyes científicas sean sintéticas 4 pri0?1. La caracterización kantiana de las nociones de analítico y sintético (así como de a priori y a posteriori) deja bastante que desear. Kant define las proposiciones analíticas como aquellas en que el predicado está contenido en el sujeto, y las sintéticas como aquellas en que el predicado no está contenido en el sujeto. Esta definición presupone (1) que todas las proposiciones son del tipo sujetopredicado universalizado, es decir del tipo «todo $ es P», donde $ y P son conceptos, y (2) que los conceptos complejos son uniones o sumas de características o conceptos simples. Ámbas prnpea nes son inaceptables. La presuposición (1) de que todas las proposiciones son del tipo «todo $ es P» es falsa en general, y especialmente falsa respecto a las leyes y teoremas de la geometría euclíidea y de la mecánica newtoniana, que son las proposiciones que más interesan a Kant en este contexto. Una proposición de la geometría euclídea dice que «hay al menos tres puntos distintos que no están en la misma recta». Otra de la mecánica newtoniana afirma que «dos partículas cualesquiera se atraen con una fuerza directamente proporcional al 145

 a producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de sus distancias». Evidentemente ninguna de estas dos proposiciones es del tipo «todo S es P» y, por tanto, la definición kantiana de analítico y sintético no se aplica a ellas, por lo que la pregunta de si son analíticas o sintéticas «en el sentido kantiano» carece de sentido. Al establecer su distinción, Kant pensaba en proposiciones como «todo mamífero (es decir, vertebrado vivíparo, de sangre caliente, etc.) es vertebrado» y, en general del tipo «todo $ es P», donde S = P + H + ... Pero por mucha presión que apliquemos, no lograremos meter la proposición «hay al menos tres puntos distintos que no están en la misma recta» y la ley de la gravitación universal en el zapato o molde «todo $ es P» y, por tanto, no habrá manera de decidir si estas proposiciones son analíticas o sintéticas. ¿Cómo explicar tal descuido por parte de Kant en un punto tan central de su teoría? Sin duda por su excesiva confianza en la lógica aristotélica tradicional, que él suponía ya perfecta y acabada desde Aristóteles, confianza sin duda acrecentada por la asunción acrítica de dicho análisis por parte de Leibniz. La presuposición (2) de que los conceptos son simples o complejos y de que estos últimos son la suma de varios conceptos simples es igualmente inaceptable. Esta idea, que Kant acepta acríticamente, viene de Leibniz. Durante su etapa juvenil (hasta 1682) Leibniz pensaba que sólo hay un número finito de conceptos simples, alcanzables mediante un análisis finito de los conceptos complejos. Según Leibniz, una proposición es verdadera si y sólo si el predicado está contenido en el sujeto, es decir, si todos los conceptos simples, notas o características de que se compone el predicado son también conceptos simples, notas o características del sujeto. Basado en esta concepción de la verdad, Leibniz descubrió en 1679 (contaba entonces 34 años) un ingenioso procedimiento de decisión de todas las verdades, que en cierto modo puede considerarse como un precedente de la gúdelización, A cada concepto simple asignamos biunívocamente un número primo —su número característico. Á cada concepto 146

 complejo asignamos como número característico suyo el producto de los números característicos de los conceptos simples que lo componen. Debido a la desconposición unívoca de todo número natural en factores primos y a las leyes de la divisibilidad, el enunciado «todo $ es P» es verdadero si y sólo si el número característico del sujeto $ es divisible por el número característico del predicado P. De ahí que Leibniz propusiera realizar un diccionario que asignara a cada concepto su número característico. Con ello se habrían acabado las discursiones. Bastaría mirar en el diccionario y dividir los números correspondientes para saber quién tiene razón. Kant como lógico En 1770 fue nombrado Kant profesor titular de lógica y metafísica de la Universidad de Kónigsberg, cargo que ocupó hasta su muerte, Sin embargo hay que reconocer que Kant no fue un lógico brillante. Ya hemos visto que define sus básicas nociones de analítico y sintético de un modo tan restringido que las deja indefinidas para los casos (las leyes de la geometría y la mecánica) que más le interesan. La vaga alusión a que las proposiciones analíticas se basan en el principio de contradicción no contribuyen a arreglar las cosas. Desde luego cualquier proposición que ejemplifique un principio lógico es analítica, pero el principio de contradicción no es más que uno entre otros, y una proposición que ejemplifique cualquier otro principio lógico no es menos analítica que una que ejemplifique el de contradicción. Por otro lado no está nada claro que toda proposición analítica ejemplifique algún principio lógico, y desde luego mucho menos que ejemplifique precisamente el principio de contradicción. La insatisfactoria definición kantiana de lo analítico y sintético se basaba implícitamente en el análisis leibniziano de las proposiciones, coro acabamos de ver. Pero en Leibniz había al menos una explicación de los supuestos, una invención de nuevos métodos e

 incluso una conciencia de los problemas. Nada de eso se observa en Kant, cuya aceptación acrítica de la concepción leibniziana da lugar a un tratamiento irreflexivo y de segunda mano de la estructura lógica de los enunciados. En sus lecciones de lógica (publicadas en 1800) Kant señala que la lógica salió ya perfecta de las manos de Aristóteles y que es imposible que experimente nuevos progresos en cuanto a su contenido. Pero Kant nunca tuvo el sentido lógico de Aristóteles. La silogística aristotélica ya le resultaba demasiado sutil, formal y complicada. En contraste con Leibniz, que completó creativamente la silogística, llevándola a su perfección, Kant consideró que de la silogística le sobraba todo, excepto los dos únicos modos Barbara y Celarent. Aristóteles había construido la silogística axiomáticamente, mostrando cómo todos los modos podían reducirse a (deducirse de) los dos primeros, Barbara y Celarent, mediante ciertas reglas como las de conversión. Leibniz completó las tres figuras aristotélicas con la cuarta y reunió los 24 modos válidos, mostrando cómo podían ser deducidos tomando como axiomas muchas combinaciones distintas de modos (no sólo Barbara y Celarenó. Kant, por el contrario, rechaza todos los modos silogísticos distintos de Barbara y Celarení como impuros y confusos. En su obra, significativamente titulada Die falsche Spitzfindigkeit der vier syllogistischen Figuren (La falsa sutileza de las cuatro figuras silogísticas), publicada en 1762, Kant afirma que «es imposible realizar inferencias simples y puras en más de una figura», que «sólo la primera figura... posee fuerza demostrativa», que «la división en figuras... es falsa e imposible», etc.”. En resumen, Kant sigue de un modo acrítico e irreflexivo a Aristóteles y Leibniz en su insuficiente y primitivo análisis de la estructura lógica de las proposiciones, pero al mismo tiempo se muestra incapaz de comprender lo mejor de la lógica aristotélica y lexbniziana, el magnífico sistema formal de la silogística, que él considera exageradamente sutil, 2 P.28, 148

Kant como filósofo de la matemática Cuando Kant habla de matemática, está pensando casi siempre en la geometría euclídea, en la forma en que ésta aparece formulada en los Elementos de Euclides. Cada vez que un teorema aparece en los Elementos se procede de la misma manera. Primero se formula el teorema, en general. Esta formulación se llama prótasis. Luego se señala una figura particular, que se dibuja al lado y que ejemplifica aquello de que habla el teorema. Esta ejemplificación se llama ékthesis. A continuación se dice que lo que afirma el teorema en general vale en especial de esta figura mostrada por ékthesís. Luego se realiza una o varias construcciones auxiliares (kataskeué). Finalmente se lleva a cabo la prueba [apódeixis) de que lo que afirma el teorema vale para la figura mostrada por ékthesís. En esta prueba se hace uso de los axiomas, de las definiciones y de los teoremas previamente demostrados, así como de las propiedades de la figura y de las construcciones auxiliares. Finalmente se concluye que el teorema es válido en su formulación general, Por ejemplo, el teorema 47 del libro 1 corresponde al llamado teorema de Pitágoras y aparece formulado así: «En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es igual a los cuadrados de los quercomprenden el ángulo recto». Esto es la prótasis. A continuación viene la ébethesis: «Sea ABG el triángulo rectángulo, siendo BAG el ángulo recto», seguida de la afirmación «digo que el cuadrado del lado BG es igual a los cuadrados de los lados BA y AG». Luego se realizan una serie de construcciones auxiliares, ilustradas sobre el dibujo de la figura. Finalmente viene la demostración (apódezxis) de que «el cuadrado del lado BG es igual a los cuadrados de los lados BA y AG», para terminar concluyendo: «Por tanto, en los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiene el ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto, que es lo que había que demostrar». Kant considera que el método matemático por excelencia es el método usado por Euclides, consistente en demostrar un teore149

AAA AAA A A e e + ld dect St dd dd llo dl o td cl dl li ls es cli ds ll is ld lA a a ARIAS lol af de SÍ Il IL A dt AAA AA ma general probando que lo que el teorema dice se cumple en una figura particular previamente construida, dibujada o ejemplificada. En 1763 la Real Academia de Ciencias de Berlín había convocado un concurso, en el que había que responder a la pregunta: «¿Son las verdades metafísicas en general, y en particular los principios fundamentales de la teología natural y de la moral, susceptibles de recibir demostraciones tan claras como las de la geomerría? Y, si no lo son, ¿cuál es la naturaleza de su certeza?». Kant ganó el concurso con su Untersuchung tiber die Deutlichkezt der Grundsátze der natúrlichen Theologie und der Moral (Investigación sobre la claridad de los principios de la teología natural y de la moral), de 1765, en que establece las diferencias entre la argumentación matemática y la filosófica. La primera diferencia, según Kant, estriba en que la matemática parte de definiciones de conceptos claros y precisos y procede a deducir consecuencias a partir de ellas, mientras que la filosofía se ocupa de conceptos que le son dados como confusos (verworren) e imprecisos y trata de llegar a definiciones de los mismos. Aquí, pues, la tarea de la filosofía queda caracterizada como análisis conceptual. La segunda diferencia, según Kant, estriba en que en la matemática los conceptos generales se ejemplifican siempre mediante construcciones e intulciones individuales. y las argumentaciones se refieren a esos representantes concretos de los conceptos, mientras que en la filosofía los conceptos generales no pueden ser ejemplificados mediante construcciones e intuiciones individuales, sino que tienen que ser comparados y pensados de un modo abstracto. «En la geometría —escribe Kantt—, para reconocer las propiedades de todo círculo, se dibuja uno, y, en vez de trazar todas las líneas posibles que se corten en su interior, se trazan dos, De estas dos líneas se demueseran las relaciones y en ellas se contempla en concreto la regla general de. las relaciones de las líneas que se cruzan en cualquier círculo ?.» 2 Pp. 73-74. 150

KANT COMO FILÓSOFO DE LA CIENCIA e e A A e e A A AAA A A A A a a O A A e AX 2 Esta concepción de la diferencia entre el método matemático y el filosófico permanecería siempre vigente en Kant. Ál final de la Kritik der reinen Vernunft (Crítica de la razón pura), de 1781, en el apartado dedicado a la «doctrina trascendental del método», Kant señala que «el conocimiento filosófico sólo considera lo particular en lo general, mientras que el matemático considera lo general en lo particular, incluso en lo individual...»*, «El conocimiento filosófico es el conocimiento racional a partir de conceptos; el matemático, a partir de la construcción de conceptos. Pero construir un concepto significa representar a priori su intuición correspondiente. Así construyo un triángulo representando el objeto correspondiente a este concepto, bien en la intuición pura, mediante la imaginación, o en la intuición empírica, sobre el papel, pero en ambos casos 4 priori...» En el lenguaje kantiano, «intuición» (Anschauung) significa representación individual, y «construcción» significa producción de una tal representación. La construcción en que se basa la geometría es el trazado de una figura (en la imaginación o sobre el papel, da igual); el álgebra y la aritmética, en el trazado de signos gráficos. Ahora bien, ¿cómo podemos estar seguros de que el resultado de esas construcciones individuales tiene valor universal? ¿Cómo justificar la validez a priori, universal y necesaria, de los teoremas de la matemática y, en especial, de los de la geometría? ¿Cómo explicar la matemática aplicada, la universal aplicabilidad empírica de la geometría pura? La respuesta kantiana es bien conocida: Sólo podemos representar u observar las cosas en la medida en que las forzamos a adoptar las formas a priori de nuestra sensibilidad. Ahora bien, nuestras construcciones matemáticas no hacen sino articular esas formas 4 priort. Los conceptos matemáticos requieren siempre dE la ékthesís, del caso concreto, del ejemplo. Ese ejemplo ha de ser construido en 1 L, Kanu Kritik der reinen Ver munfe A7Í4, 2 Ibídem, A 713. 151

 concreto, pero a priori. Ello sólo es posible ——según Kant— mediante la intuición pura, previa a toda experiencia, del marco perceptual del espacio y el tiempo. Este marco tiene validez general para todas las cosas conocidas o fenómenos, pues las cosas sólo pueden ser conocidas en la medida en que se ajusten a él. La concepción kantiana del espacio y el tiempo Al principio Kant había defendido una concepción abierta del espacio, basada en la propuesta leibniziana de considerar el espacio como un sistema de interrelaciones entre sustancias. En 1746, en su primer escrito, Kant había sostenido que la proposición de que el espacio tiene 3 dimensiones es contingente. Las sustancias podían concebiblemente relacionarse de otra manera y dar lugar a más dimensiones, a otros tipos de espacio distintos del euclídeo. «Una ciencia de todos estos posibles tipos de espaclo escribe Kant— sería indudablemente la más grande geometría que una mente finita podría tratar de desarrollar *.» En los 20 años siguientes la concepción relacional y abierta del espacio va siendo sustituida en Kant por la concepción newtoniana del espacio absoluto. Así, en 1768, en Von dem ersten Grunde des Unterschiedes der Gegenden im Raume afirma que «el espacio absoluto tiene una realidad propia, independiente de la existencia de toda materia». Y dos años más tarde, en su disertación de 1770, De mundi sensibilis atque intelligibilis forma et principiis, aparece ya su concepción del espacio y el tiempo como intuiciones puras, y de la tridimensionalidad como una propiedad necesaria del espacio. La concepción leibniziana del espacio no podía dar cuenta del presunto carácter apodíctico de la geometría. Pero ahora, en la disertación de 1770, el espacio, concebido como forma de la sensibilidad, como esquema subjetivo impuesto a toda posible sensa* 1, Kanu Gedanken von der wabren Schátoung der lebendigen Kráfte, $10.

KANT COMO FILÓSOFO DE LA CIENCIA HUA A A A A A Á _ Ñ_—— Q >. o - — 2 A e II IS a e li la IS O e ln ción, explica la necesidad de la geometría. El mundo espaciotemporal que vemos, y al que se refiere la matemática, es un mundo de apariencias, de fenómenos. Aparte y detrás de él hay un mundo real, no intuitivamente cognoscible por la sensibilidad, pero simbólicamente sabible por la razón y objeto de la metafísica. Las principales líneas de la posterior concepción kantiana del espacio y el tiempo ya están aquí. La Kritik der reinen Vernunfi, publicada en 1781, rechaza como ilusoria la posibilidad de un presunto saber metafísico acerca del mundo real no fenoménico, pero por lo demás incotpora la concepción del espacio y el tiempo contenida en la disertación de 1770. Esta concepción se presenta en el contexto epistemológico de la justificación de la validez universal y necesaria de la matemática y, en especial, de la geometría euclídea. La pregunta fundamental es: ¿Cómo son posibles los juicios sintéticos a priori en la geometría euclídea? La respuesta es: La geometría euclídea es la teoría del espacio euclídeo, que es la forma que nuestra sensibilidad impone a todo objeto, al percibirlo. No podemos percibir objetos más que percibiéndolos en el espacio euclídeo. Por eso todos los objetos percibidos necesariamente se conforman a lo que dice la geometría euclídea. El espacio euclídeo y el tiempo absoluto son —en metáfora usual y adecuada— como las gafas a través de las cuales vemos todos los objetos de experiencia. Si esas gafas son azules, ya 4 priorí podemos decir que necesariamente lo veremos todo azul. Las relaciones espaciotemporales se dan entre todos los perceptos, porque nosotros se las imponemos al percibirlos. No es que el mundo real sea euclfdeo. Lo que es euclídeo es el mundo perceptual, apariencial, y eso por la sencilla razón de que el mundo real sólo puede aparecérsenos y hacérsenos perceptible dejándose previamente violentar y conformar por las formas de nuestra sensibilidad, que —ellas— son euclídeas. De lo que podemos estar seguros, según Kant, no es de que el mundo real sea euclídeo (eso sería una mera afirmación metafísica imposible de controlar), sino de que el mundo que percibimos será siempre euclídeo. Por eso la geometría euclí153

 o dea es válida universal y necesariamente de cualesquiera objetos que podamos percibir. La concepción kantiana del espaciotiempo es genial en cuanto que por primera vez reconoce que nuestro aparato sensorial conforma la percepción de lo percibido. Si tuviéramos otro aparato sensorial distinto, tendríamos otras percepciones diferentes. El a priorí sensorial tiene una indudable realidad biológica, como han subrayado múltiples pensadores conocedores de la neurofisiología de la percepción humana, desde Hermann von Helmholz hasta Konrad Lorenz. Cada especie animal experiencia y capta un mundo distinto, producto tanto de los estímulos a posteriorí del mundo exterior como de las formas a priorz de su aparato neurosensorial. Nosotros, los humanes, vemos lo que vemos, oímos lo que oímos, etc., porque tenemos el aparato neurosensorial que tenemos y no otro, Pero las consecuencias de idealismo que Kant y muchos kantianos sacan de esta situación son inaceptables. Las estructuras perceptuales incorporadas en nuestro aparato neurosensorial son a priori respecto al individuo, pues nace con ellas, le son innatas. Pero son a posteriori respecto a la especie, que las ha ido adquiriendo en el curso de la evolución, bajo la constante presión selectiva de la realidad exterior. Si precisamente estas estructuras sensoriales han superado las dificultades y han sobrevivido, es porque estaban bien adaptadas al mundo real, que es en el que las especies evolucionan, se adaptan y sobreviven. Como escribe Konrad Lorenz: «Las gafas" de las formas de nuestra sensibilidad y de nuestro pensamiento, como... espacio y tiempo, son funciones de una organización neurosensorial, que se ha desarrollado al servicio de la supervivencia de la especie. A través de esas gafas vemos una imagen real de la realidad, bien que esta imagen esté simplificada de un modo crasamente utilitarista: sólo hemos desarrollado un "órgano" para aquellos aspectos del mundo-en-sí cuya captación era esencial para la supervivencia de nuestra especie»". 7 Konrad Lorenz: Die Rückscite des Spiegels, Piper Verlag, Múnich, 1973, p. 17. | 154

. . ISANT COMO FILÓSOFO DE LA CIENCIA 2 O Kant pretende basar el saber matemático en el conocer intuitivo, la geometría en la percepción. Y puesto que nuestro aparato neurosensorial (lo que Kant llama las formas a prior de nuestra sensibilidad) determina univocamente nuestra posibilidad de percepción, así también determinaría unívocamente nuestra geometría. Pero de hecho eso no ocurre. La geometría es una teoría abstracta, simbólica, que no depende para nada de la percepción, como Hilbert demostraría un siglo más tarde. La filosofía kantiana de la matemática es una defensa de la tesis de que la geometría cuclídea es necesaria y la única posible. Pero pronto la historia se encargaría de refutar esa tesis con el posterior desarrollo de las geometrías no euclídeas por Gauss, Bolyai, Lobachevski y otros. Ni siquiera ha resultado sostenible la tesis kantiana de que la geometría euclídea sea la única aplicable en física. De hecho la geometría no euclídea de Riemann es la que se aplica en la teoría general de la relatividad. E incluso en el caso euclídeo es falsa la pretensión de que sólo basándose en la intuición de figuras espaciales concretas puede hacerse geometría. Tales figuras son desde luego muy útiles en la geometría euclídea plana y tridimensional. Pero en nuestro siglo nos hemos acostumbrado a estudiar geometrías (euclídeas, si se quiere) 1 dimensionales (para cualquier número natural 2) e incluso geometrías infinitodimensionales, respecto a las cuales carecemos por completo de intuición espacial, de ayuda intuitiva en nuestro aparato neurosensorial (las formas a priori de nuestra sensibilidad), teniendo que limitarnos a desarrollarlas de un modo puramente simbólico y conceptual. | De todos modos hay que señalar que la filosofía de la matemática de Kant ha tenido notable, aunque desigual, influencia. Así, Frege la aceptaba respecto a la geometría, pero la rechazaba en lo que se refiere a la aritmética. Brouwer (el fundador del intuicionismo), por el contrario, la aceptaba respecto a la aritmética, pero la rechazaba en lo que toca a la geometría. Precisamente el nombre de 'intuicionismo" (a primera vista extraño) le viene a esa lógica y filosofía de la matemática de la aceptación por su fundador, Brou155

 wer, de la doctrina kantiana de la construcción de los números en la intuición del tiempo. Temprano interés de Kant por la dinámica Kant estudió física en la Universidad de Kónigsberg. Su primera publicación, escrita cuando contaba sólo 22 años, apareció el año 1746 bajo el título Gedanken vor der wahren Schátzung der lebendigen Kráfie und Beurteilung der Beweíse, derer sich Herr von Leibniz und andere Mechaniker in dieser Streitsache bedient haben (Pensamientos sobre la verdadera estimación de las fuerzas vivas y. examen de las pruebas que Leibniz y otros mecánicos han presentado en esta discusión). Se trataba de un libro de 255 páginas dedicado a la discusión entre los cartesianos y los leibnizianos acerca de cómo medir las fuerzas. Descartes había definido la fuerza de un móvil como el producto de su masa por su velocidad y había formulado un principio de conservación de la cantidad total de fuerza (lo que ahora llamaríamos un principio de conservación del momento lineal). Leibniz consideró insuficiente e insatisfactoria la dinámica cartesiana. En su lugar introdujo los conceptos de fuerza viva y fuerza muerta. La fuerza muerta es la que depende de la posición del cuerpo, lo que ahora llamamos su energía gravitatoria potencial. La fuerza viva es el producto de la masa por el cuadrado de la velocidad, es decir, el doble de lo que hoy llamamos energía cinética. La pérdida de fuerza muerta correspondía, según Leibniz, a un aumento de fuerza viva. Este principio venía a equivaler a lo que ahora llamamos el principio de conservación de la energía mecánica total (cinética + gravitatoria potencial) de un sistema. Descartes pensaba en la colisión de bolas, en la que se conserva el momento lineal. Pero ese principio cartesiano de conservación del momento lineal no se aplica a otros casos, como la oscilación de un péndulo, que sin embargo sí cumple el principio de conservación de la energía mecánica total. En efecto, cuanto más alto está el centro de masa

A a AA RA PA _—_z——— KK A AN IIA A AZ —É del péndulo, menor es su energía cinética, pero mayor es su energía (gravitatoria) potencial, y a la inversa ocurre cuanto más bajo está. Aquí triunfa el análisis lerbniziano. En su publicación de 1746 se nos muestra Kant como muy al corriente de las discusiones entre cartesianos y leibnizianos acerca de las fuerzas vivas, citando repetidamente a los hermanos Bernoulli y tomando finalmente partido por la definición leibniziana (masa por el cuadrado de la velocidad), siempre que se dé un movimiento libre. Las especulaciones cosmológicas de Kant Si el trabajo de 1746 sobre las fuerzas vivas se mueve todavía dentro de las coordenadas de la física leibniziana, poco después Kan: descubre y asimila la mecánica de Newton, que a partir de entonces se convertirá ya para él en la mecánica definitiva. Durante los 9 años sigulentes compagina su actividad de tutor de familias nobles de las cercanías de Kónigsberg con el interés por la mecánica y la cosmología, fruto del cual es su importante obra de 1755 titulada Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels, oder Versuch von der Verfassung und dem mechanischen Ursprunge des ganzen Weltgebáudes nach Newtonischen Grundsátzen abgehandelt (Historia natural general y teoría del cielo, o ensayo sobre la constitución y el origen mecánico del universo entero, tratado según los principlos de Newton). | El libro comienza con un resumen de lo que entonces se sabía acerca del sistema solar, compuesto del Sol y los seis planetas conocidos (Mercurio, Venus, la Tierra, Marte, Júpiter y Saturno), el satélite de la Tierra —la Luna—, 4 satélites de Júpiter y 5 de Saturno, y los cometas. Todos los planetas describen sus órbitas en aproximadamente el mismo plano y se conforman a las leyes de Kepler, explicables a su vez por la resultante de la actuación simultánea de la fuerza centrifuga y la gravitatoria sobre cada planeta. Los 6 planetas mencionados ya habían sido descubiertos en la más 157

 remota antigiiedad, por los babilonios y otros pueblos. En 1781 (el año de la publicación de la Kritik der reinen Vernunfi) William Herschel descubriría un nuevo planeta, Urano. En 1846 Leverrier y Adams predecirían la existencia de Neptuno y calcularian su posición, en la que efectivamente sería localizado. El descubrimiento de Plutón habría de esperar hasta 1930. Uno de los rasgos notables del sistema solar, subrayado por Kant, es la coplanaridad de las órbitas planetarias, es decir, el hecho de que todas ellas se encuentren aproximadamente en el mismo plano —el de la eclíptica. El plano orbital que más se desvía del de la eclíptica es el de Plutón (forma un ángulo de 27”), pero esto aún no se sabía en tiempos de Kant. De los conocidos entonces, la mayor desviación la presentaba el de Mercurio (77). En esta obra aparece ya la tendencia kantiana a considerar que las cosas tienen que ser necesariamente como Newton las había descrito. Newton había calculado la masa de la Tierra, Júpiter y Saturno y había constatado que la densidad de la Tierra era la mayor y la de Saturno la menor. De aquí pronto se había concluido que la densidad de los planetas era inversamente proporcional a su distancia al Sol. Cuanto más próximos al Sol, más densos; cuanto más alejados, menos densos. Hoy sabemos que esta correlación no se da en todos los casos. Así la masa (expresada en gramos por cm?) de Saturno es de 0,7, la de Urano (que está más lejos del Sol) es de 1,2 y la de Neptuno (que está todavía más lejos) es de 1,7, lo que contradice esa presunta ley, si bien es cierto que Kant no podía tener en cuenta la densidad de planetas que aún estaban por descubrir. La densidad de Venus (5,2) es también ligeramente inferior a la de la Tierra (5,5), a pesar de estar más cerca del Sol. | Kant pensaba que la densidad de los planetas era siempre inversamente proporcional a su distancia al Sol, tal y como había conjeturado Newton, pero que ello no era una mera cuestión de hecho, sino que necesariamente tenía que ser así. Á esta cuestión dedica el segundo capítulo de la segunda parte, titulado «Acerca de la diversa densidad de los planetas y de la relación entre sus masas», en el 158

A A A que, basándose en sus ideas cosmogónicas, concluye que «las masas de los planetas tienen que ser tanto más densas cuanto más cercanos estén al Sol, y tanto menos densas cuanto mayor sea la distancia». Esta cuestión es importante para Kant y en ella se basa su concepción acerca de los habitantes de los diversos planetas, expuesta en la tercera parte de su libro, titulada «Sobre los habitantes de los astros». Kant estaba convencido de que la mayoría de los astros y, desde luego, de los planetas estaban habitados. Esta misma opinión la compartía también William Herschel, el mayor astrónomo de su tiempo. Según Kant, los habitantes de los diversos planetas son tanto más sutiles e inteligentes cuanto más sutil y ligera es la materia de que están hechos y, por tanto, cuanto menos denso es el planeta en el que viven. Los más tontos y pesados de espíritu son los habitantes de Mercurio, el planeta más denso y próximo al Sol. Los más inteligentes y despiertos de espíritu son los habitantes de Júpiter y Saturno, los planetas menos densos y más alejados del Sol. «Hay que reconocer —escribe Kant—- que las distancias de los astros al Sol determinan ciertas situaciones, que a su vez influyen decisivamente en las propiedades de las naturalezas pensantes...»” En efecto, «el humán, que forma todos sus conceptos y representaciones a partir de las impresiones que el universo, por, medio del cuerpo, produce en su alma, depende completamente de la constitución de la materia a la que el creador lo ha ligado, tanto respecto a la claridad de sus conceptos y representaciones como respecto a la capacidad de combinarlos y compararlos, que es a lo que llamamos capacidad de pensar»*”. Pero sí la capacidad de pensar depende de la constitución de la materia de que está hecho el pensante, ésta a su vez depende de la distancia del planeta al Sol. «La materia de la que están hechos los habitantes de los diversos planetas, e incluso sus animales y plantas, tiene que ser tanto más ligera y $ 1, Kant: Allgemeine Naturgescbichte und Tbeorie des Himmnels, p. 40, ? Ibídem, p. 174. 0 Ibídem, p. 180. 159

mamma fina, y la elasticidad de las fibras y su estructura interna tiene que ser tanto más perfecta cuanto más alejados del Sol estén los planetas»!!, Nosotros, los humanes, habitantes de la Tierra, ocupamos una posición intemedia: no somos tan torpes como los de Mercurio o Venus ni tan inteligentes como los de Júpiter o Saturno. Un hotentote terrestre les parecería un Newton a los habitantes de Mercurio, pero el mismo Newton parecería un mono a los de Saturno*. «La perfección del mundo espiritual, al igual que la del material, crece y progresa en los planetas desde Mercurio hasta Saturno e incluso más allá de él (si hay otros planetas) en una gradación constante, según la proporción de sus distancias al Sol W, En esta gradación la Tierra ocupa una posición intermedia. Por ello podemos pecar. «¿No hace falta un cierto término medio entre la sabiduría y la sinrazón para que se dé la desgraciada capacidad de pecar? Probablemente los habitantes de los astros más alejados son demasiado sabios y de elevado espíritu como para caer en la locura del pecado, mientras que los habitantes de los planetas inmferiores están demasiado apegados a su densa materia y carecen de un espíritu suficientemente capaz como para ser responsables de sus actos ante el tribunal de la justicia 4.» En efecto, sólo los habitantes de la Tierra y de Marte ocupan esa posición intermedia en que el pecado es posible. En su Allgemeine Naturgeschichte Kant se plantea la pregunta por el origen del sistema solar, y le da una respuesta genial con la formulación, por vez primera, de la hipótesis de la nebulosa, adelantándose así 40 años a Laplace. Newton había criticado la teoría cartesiana de los torbellinos, pero se había abstenido de proponer él mismo hipótesis cosmogónica alguna, conforme a su lema hypothesis non fingo. En 1745 el conde de Buffon había propuesto su cosmogonía catastrofista, según la cual había que buscar el origen del sistema '* Ibídem, p. 186. 2 Tbídem, p. 187. 15 Tbídem, p. 189. 14 Tbídem, p. 197. 160

— a. ¿SANT COMO FILÓSOFO DELA CIENCÍA solar en algún lejano momento en que un gigantesco cometa se habría acercado tarito al Sol que habría logrado arrancar (por atracción gravitatoria) de él gran cantidad de materia, que en parte se habría dispersado y en parte habría acabado formando los planetas. Hoy sabemos que los cometas tienen una masa mucho menor de la que pensaba Buffon, por lo que nunca hubieran sido capaces de arrancar gran cantidad de materia del Sol. A principios del siglo xx Bickerton, Jeffreys, Jeans y otros presentaron una teoría cosmogónica parecida a la de Buffon, sólo que basada en la casi colisión de otra estrella con el Sol. La gran masa atribuida a los cometas por Buffon es otra consecuencia más de la generalización, admitida por Kant y casi todos los pensadores del siglo XVIII, de la constatación newtoniana de la densidad decreciente de los planetas con satélites por él conocidos (la Tierra, Júpiter y Saturno). Como ya vimos, según esa generalización la densidad de un cuerpo celeste del sistema solar sería tanto mayor cuanto más próximo estuviera al Sol. Por tanto los cometas, que se acercan más al Sol que ningún planeta, tendrían una máxima densidad. En 1755, en el primer capítulo de la segunda parte de su Aligemeine Naturgeschicbte Kant propuso por primera vez la hipótesis cosmogónica del origen del sistema solar por la rotación y contracción de una nube o nebulosa gaseosa primitiva. Esta Mipóresis encuentra un serio apoyo en el hecho de que todos los planetas se mueven casi en el mismo plano y que todos giran sobre su eje con un movimiento de rotación de igual sentido que su movimiento de traslación en torno al Sol y que la rotación del Sol mismo. De hecho hay alguna que otra excepción, como la representada por el planeta Venus, cuya rotación es retrógrada y de sentido contrario a la de los demás planetas y a la de su propia traslación. Pero la superficie de Venus está siempre cubierta por espesas nubes y sólo en nuestro siglo ha sido posible descubrir su rotación retrógrada. Kant parte de una distribución uniforme de las partículas matertales en el espacio. Una de esas partículas, mayor que sus vecinas, atrae a éstas, con lo que empieza a formarse un núcleo de masa creciente, que atrae a partículas más y más alejadas, cuyas colisio161

generando un movimiento de creciente rotación en la nebulosa original, que acaba dando lugar al Sol y los planetas, satélites y cometas. Este proceso explica tanto el que todos los planetas se encuentren en el mismo plano como el que todos tengan movimiento de rotación y traslación de igual sentido y el que los planetas sean tanto más densos cuanto más cercanos al Sol estén. En 1796 Laplace expondrá la misma teoría, ya mucho más elaborada matemática y físicamente, en su Exposition du systeme du monde. Laplace no cita a Kant, y no sabemos si conocía su trabajo de 1755. Al principio habría habido una nebulosa gaseosa incandescente, dotada de un movimiento rotatorio, que lentamente se enfriaba y contraía. Al contraerse, aumentaba su velocidad. En efecto, la ley de conservación del momento angular exige que, al disminuir el radio de una masa en rotación, aumente su velociídad, a fin de mantener constante el momento angular. Al aumentar la velocidad angular, la aceleración del giro determinó un aumento de la fuerza centrífuga, que a su vez dio lugar al desprendimiento de anillos de materia de la superficie del núcleo de la nebulosa en contracción. El núcleo central acabó siendo el Sol y los anillos desprendidos acabaron dando origen a los planetas, que seguían girando en el mismo sentido que sus anillos generadores (y que el Sol). La hipótesis de Kant y Laplace, refinada y completada por von Weizácker en 1944 y por otros posteriormente, vuelve a estar en boga en la cosmología de nuestros días. Además de sus especulaciones cosmogónicas, Kant presentó en su Allgemeine Naturgeschichte una grandiosa visión de la estructura del universo, Nuestro sistema solar no es un caso aislado, Cada estrella es el centro de otro sistema solar. Y a su vez muchísimos sistemas solares juntos forman otro sistema de orden superior, un sistema galáctico o galaxia, como, por ejemplo, la Vía Láctea, de la que nuestro Sol forma parte. Cada galaxia es como un universo-isla. Pero nuestra Vía Láctea no es sino una de las innumerables galaxias que pueblan el universo y que a su vez se artículan en sistemas de orden aún superiores, en lo que hoy llamaríamos 162

cúmulos y supercúmulos galácticos. Según Kant este proceso sería indefinidamente extendible a sistemas cada vez más amplios, lo cual (a partir del nivel de supercúmulos galácticos) ha resultado ser una mera especulación. De todas formas la visión kantiana de un universo lleno de innumerables galaxias, cada una de ellas compuesta de muchísimas estrellas, centros de otros tantos sistemas solares, anticipaba ideas más tarde expuestas por William Herschel y sólo universalmente admitidas bien avanzado el siglo XX. Otra importante anticipación estriba en la sugerencia por Kant de que la fricción de las mareas frena la rotación de la Tierra. Eso ha resultado ser correcto, aunque todavía se tardaría un siglo más en poder demostrarlo. La evolución de la filosofía kantiana de la física En su trabajo de 1746, Von der wabren Schátzung der lebendigen Kráfte, Kant estaba aún inmerso en el mundo de la física cartesiano-leibniziana. En los años siguientes descubre y asimila la obra de Newton y otros mecánicos posteriores y su posición se hace más dogmática y puramente newtonjana: la mecánica de Newton es la única mecánica verdadera posible, y la base de su cosmología, presentada en 1755 en Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels. En esta obra se observa ya la tendencia kantiana a considerar cada tesis newtoniana como necesaria, incluso en cosas tan aparentemente contingentes como la correlación de densidades entre los planetas, tendencia que culminará en sus obras posteriores. En la Kritik der reínen Vernunfe, Kant pretende ya fundamentar los principios más generales de la mecánica de Newton en las condiciones de toda experiencia posible, salvándolos así de las críticas de Hume. Á pesar de esas críticas siempre sería posible considerar la mecánica de Newton como una útil herramienta intelectual y como una fuente altamente fiable de explicaciones y predicciones. Pero esto no bastaba a Kant, para quien las leyes de 163

 la mecánica tenían que ser formidables, óptimas, necesarias, apodípticas, seguras, al tiempo que informativas y ricas de contenido, es decir, en su jerga, sintéticas a priori. Para Kant es un hecho incuestionable que la mecánica de Newton —como la geometría de Euclides-—- proporciona leyes sintéticas a priori de la naturaleza. En 1783, dos años después de la aparición de la Kritik der reinen Vernunft, Kant publica una especie de aclaración y resumen de la misma, titulado Prolegomena zu eíner jeden kúnfiigen Metaphysik, die als Wissenschaft wird aufireten kónnen (Prolegómenos a cualquier metafísica futura que pretende presentarse como ciencia). En $15 Kant constata: «Ahora poseemos realmente una ciencia natural pura, que formula las leyes de la . naturaleza a priori y con toda la necesidad característica de las proposiciones apodípticas... Existe, por tanto, de hecho una ciencia pura de la naturaleza, y la pregunta que se plantea es: ¿cómo es posible esta ciencia?». De todos modos, en la Kritik der reinen Vernunfi y en los Prolegomena Kant disungue todavía entre los principios generales de la física de Newton (como el principio de causalidad), que serían puros y a priori, y los principios empíricos, que dependerían parcialmente de la experiencia, como las leyes del movimiento, Esta distinción irá desapareciendo en la evolución posterior del pensamiento kantiano. En 1786 publica Kant Metaphysische Anfangsgrinde der Naturwissenschaft (Fundamentos metafísicos de la ciencia natural), donde ya varias de las leyes del movimiento de Newton aparecen como deducidas a priori a partir de los principios del entendimiento puro y sin intervención ninguna de la experiencia. Los más importantes principios del entendimiento puro, ya expuestos en la Kritik der reinen Vernunft*?, son los amados por Kant analogías de la experiencia, que le sirven ahora para obtener otras tantas leyes de la mecánica. La primera analogía de la experiencia es el principio de permanencia de la sustancia: «En todo cambio fenoménico permanece la sustancia y la cantidad de sustancia no 5 L Kant Kritik der reinen Verunft, A 729-266. 164

KANT COMO FILÓSOFO DE LA CIENCIA ¡$_A:

 año de su muerte, vemos a Kant pretendiendo deducir a priori varias leyes concretas de la física. La constitución de la mente humana determina los tipos de posibilidad física, así como la presencia de ciertas fuerzas y de un éter omnipresente. En este Kant ya senil se aprecia una tendencia a hacer que sea el sujeto quien pone el mundo, como en Fichte. El contacto con la experiencia y con la ciencia viva se ha roto, y el idealismo especulativo hace su aparición. El apriorismo de las leyes de la naturaleza La naturaleza es para Kant la totalidad de los objetos de experien- : cia. Las leyes de la naturaleza valen para todos los objetos naturales, es decir, para todos los objetos de experiencia, pues se limitan a describir las condiciones de toda experiencia posible, es decir, las condiciones de aplicación de los conceptos del entendimiento a los perceptos de la sensibilidad. «Los principios de la experiencia posible son igualmente las leyes generales de la naturaleza, que pueden ser descubiertas a priorí. De este modo queda resuelto el problema planteado en nuestra segunda pregunta: ¿Cómo es posible una ciencia natural pura? %» Las leyes de la naturaleza son sintéticas a priorí, tienen validez universal, pues representan la estructura de toda experiencia posible. Sólo conforme a ellas podemos aplicar conceptos a perceptos, podemos tener experiencia. La experiencia —-Erfabrung— es precisamente el lugar privilegiado en que el mundo perceptual es no sólo percibido, sino además pensado. Pero sólo podemos pensarlo de acuerdo con las categorías, esquemas y principios de nuestro entendimiento. No se trata de categorías y principios que estén dados en la experiencia (en ese caso serían inseguros, a posteriori), sino de categorías y principios que ponemos nosotros en la experiencia. Sólo hay experiencia en la medida en que los ponemos, sólo con ellos podemos aplicar conceptos a perceptos, podemos pensar los 2 1, Kant: Prolegomena, $23, p. 306.

——————— A A E A AS Dl ld lr Nil ll ls mn E | objetos empíricos. No es de extrañar, pues, que toda experiencia se ajuste a ellos, que ningún pensamiento empírico los contradiga. ¿Cuáles son en concreto esas leyes de la naturaleza, que descubrimos 4 priori, como dadas por la estructura misma de nuestro aparato pensante, de nuestro entendimiento? Ya hemos visto que la doctrina kantiana fue variando a este respecto. En la Kritik der reínen Vernunft y en los Prolegomena se trataría sólo de los principios más generales de la concepción mecanicista newtoniana, tales como el principio de causalidad y de conservación de la masa, Más adelante se incluyen también las leyes del movimiento y al final incluso leyes más concretas, Kant pensaba, por ejemplo, que es imposible hacer física sin introducir el principio de causalidad, pensaba que una física indeterminista sería imposible. También aquí la historia posterior se encargaría de refutarle, al igual que le pasó con la geometría. Ya Max Planck (buen conocedor de Kant, por otra parte) trató siempre la causalidad como una mera hipótesis, no como un a priori del pensamiento humano. Siguiendo sus huellas, la mecánica cuántica sustituyó la causalidad por las meras relaciones de probabilidad, E incluso, rizando el rizo y dando por completo la vuelta a la tortilla, en nuestro tíempo se ha propuesto (por Patrick Suppes) definir la noción misma de causalidad en función de la probabilidad. A sería causa de B si y sólo si la probabilidad de 8 sola es menor que la probabilidad condicional de B, dado 4. En símbolos, Á causa BS p(B)

 que decía, dónde se equivocó y dónde señaló caminos que aún permanecen abiertos. Kant señaló 3 etapas en la organización cognitiva de las impresiones que recibimos del mundo exterior: (1) Las sensaciones brutas son organizadas mediante las formas puras de la sensibilidad (espacio y tiempo) y dan lugar a las percepciones. (2) Las percepciones son interrelacionadas mediante los conceptos puros del entendimiento (categorías) y dan lugar a juicios y proposiciones empíricas. (3) Las proposiciones empíricas se organizan mediante los principios regulativos de la razón en teorías cada vez más amplias y comprensivas. En su análisis de las 3 etapas Kant introdujo distinciones y enfoques cuya fecundidad aún no se ha agotado. Kant tuvo razón en subrayar la importancia de las grandes teorías (como la geometría euclídea y la mecánica newtonjana) en la empresa científica, globalmente motivada por los principios regulativos de la razón, frente a anteriores (y ¡posteriores!) planteamientos más atomistas y estériles, centrados en problemas de inducción o contrastación de tesis particulares. Pero en su entusiasmo por tales teorías, les atribuyó un carácter necesario, inevitable y apodíctico que luego resultaron no tener. Respecto a la geometría euclídea, confundió su ejemplificación en la intuición con su estructuración como teoría abstracta. Es posible que sólo la geometría euclídea sea intuitiva, pero desde luego otras muchas geometrías distintas pueden ser simbólicamente desarrolladas como teorías abstractas. Respecto a la mecánica newtoniana, no concibió sus nociones fundamentales como términos primitivos de un cierto lenguaje (sustituible por otros lenguajes), sino como formas necesarias del entendimiento humano, sin las que éste es incapaz de funcionar, lo que evidentemente no son, Percibir y pensar Kant fue el primer filósofo que se tomó en serio la distinción fundamental entre el percibir y el pensar. La percepción no es un tipo

KANT COMO FILÓSOFO DE LA CIENCIA ¡q A A A a A A A A A AA ___—_—w A A AA A A A a rc ra confuso de pensamiento, como habían creído Descartes y Leibniz, Tampoco el pensamiento es una percepción especialmente clara. Percepción y pensamiento son dos procesos radicalmente distintos. Nuestra percepción, nuestro mundo perceptual, experiencial, vivencial, depende de las formas a priori de nuestra sensibilidad, de la estructura innata de nuestro aparato neurosensorial. No podemos percibir, experienciar, conocer, más que aquello que pasa por el filtro de nuestro aparato neurosensorial. En esto Kant tenía razón. Pero Kant quiso extender esta tesis a nuestro pensamiento, a nuestra teorización científica, y aquí se equivocó. No es que no haya formas a priori del saber, del pensar, del teorizar, pero estas formas no son las del entendimiento, sino las del lenguaje que empleamos para articular nuestra ciencia, nuestro pensamiento, nuestra teoría, Y así como no es posible cambiar de aparato neorosensorial, aunque queramos, pues éste es innato y nos viene dado (como a todas las especies animales) por nuestra clave genética, sí que es posible cambiar de lenguaje, de marco conceptual, de simbolismo. El lenguaje es convencional; está en nuestra mano cambiarlo, adoptando otras convenciones. Pero nuestro aparato neurosensorial no es convencional, está dado por la naturaleza. Como es bien sabido, los humanes sólo podemos captar, percibir, experienciar, una parte pequeña del espectro electromagnético, la correspondiente a la luz visible (del rojo al violeta). Otros animales captan otras partes del mismo. Esta limitación nuestra es irremediable. Nunca lograremos ver las ondas de radio o los rayos X. Sin embargo, podemos pensar en el resto del espectro electromagnético, podemos inferirlo, saberlo, construir su teoría, etc. Nuestra capacidad científica, simbólica, lingúiística, traspasa sin problemas los límites estrechos que nuestra sensibilidad impone a nuestra capacidad de percibir. Kant tuvo razón en subrayar la diferencia entre percepción y pensamiento. Y tuvo también razón en señalar la importancia de la experiencia, es decir, del punto de contacto entre percepción y pensamiento, entre perceptos y conceptos, entre sensibilidad y 169

 lenguaje. La gran red de la ciencia es un enorme tejido simbólico, que sin embargo en algunos de sus nudos «toca tierra» y se moja en la percepción. Esos nudos constituyen la experiencia, y el análisis filosófico de la experiencia, iniciado por Kant, sigue estando por hacer. 170

CAPÍTULO 7 LA POLÉMICA ENTRE FREGE Y HILBERT ACERCA DEL METODO AXIOMATICO

A principios de siglo tuvo lugar una polémica memorable entre Frege y Hilbert (o, quizá más exactamente, de Prege contra Hilbert). La polémica resulta memorable tanto por la importancia de sus protagonistas y del tema discutido como por el hecho de que las confusiones y ambigiiedades que determinaron su esterilidad aún perviven parcialmente entre nosotros. En 1900 Hilbert era probablemente el más grande matemático de su tiempo y Frege era, sin duda, el más grande lógicoviviente. Pero ahí se acaba la analogía. A pesar de su juventud —-tenía entonces 37 años— Hilbert había cosechado numerosos éxitos profesionales, era catedrático de la prestigiosa Universidad de Góttingen y se había podido permitir el lujo de rechazar varias otras cátedras que le habían sido ofrecidas. Hilbert era ya famoso y su fama no había hecho sino aumentar con la publicación el año anterior de su obra Grundlagen der Geometrie*. El reconocimiento que recibía de la comunidad matemática quedó reflejado en su participación estelar en el Segundo Congreso Internacional de Matemáticos, celebrado en París en 1900, en que propuso a sus colegas de

' D. Hilbert: Grundiagen der Geometrie, Leipzig, 1899. (10.* edición, B. G. Teubner, Stuttgart, 1972.)

A A o A A A KáÓAéAA A A A A

_LA POLÉMICA ENTRE FREGE Y HILBERT ACERCA DEL MÉTODO AXIOMÁTICO — El desarrollo de la polémica Frege y Hilbert se habían conocido en 1895 con ocasión de un congreso científico celebrado en Liúúbeck, donde Frege había presentado una ponencia sobre las ventajas de su escritura conceptual tanto respecto al lenguaje ordinario como respecto al simbolismo de Peano y donde ambos habían intercambiado opiniones sobre el papel de los signos en la matemática, intercambio que tuvo una. breve continuación epistolar. Durante el semestre de invierno 1898-99 Hilbert dio un curso en Góttingen sobre geometría axiomática, entre cuyos oyentes se encontraba Heinrich Liebmann, que envió un ejemplar de los apuntes del curso a Frege, que era amigo de su padre. La reacción de Prege ante las novedades metodológicas de Hilbert, manifestada en dos cartas a Liebmann?, fue negativa, impresión negativa que se confirmó tras la atenta lectura por Frege de los Grundlagen der Geometrie, publicados poco después y que constituían una versión ampliada del curso de Góttingen que Frege ya conocía. El 27 de diciembre de 1899 Frege escribió directamente a Hilbert una larga carta? en la que sometía su libro a una crítica dura y algo pedante, acusándole de total falta de rigor. Hilbert debió de sentirse irritado, pero apreciaba a Frege y, armándose de paciencia, le contestó dos días después explicándole diversos aspectos esenciales de su nuevo método. El 6 de enero de 1900 replicó Frege con otra larga carta, lúcida y agresivamente polémica, de la que Hilbert se limitó a acusar recibo. La suerte de la polémica estaba echada. Hilbert se expresaba con excesiva falta de precisión para el gusto del lógico genial y pedantemente preciso que era Frege. Y Frege, que tan aguda y lúcidamente criticaba la desafortunada terminología hilbertiana, era incapaz de ver, más allá de los árboles de sus críticas de detalle, el bosque del nuevo * La correspondencia entre H. Liebmann y Frege está recogida en G. Frege: Wissenschafilicher Briefwechsel (ed. por G. Gabriel, H. Hermes, E Kambartel, €. Thiel y A. Veraart), Felix Meiner Verlag, Hamburgo, 1976, pp. 147-151. % La correspondencia entre D. Hilbert y G. Frege está recogida en G. Frege: MWisenschaftlicber Briefwechsel, Felix Meiner Verlag, Hamburgo, 1976, pp. 55-80. 173

A - A —— MÁ 2 a método que Hilbert había descubierto y que iba a revolucionar la matemática. Al pasar los meses sin recibir cabal contestación: de Hilbert, Frege volvió a insistir con otra carta, a la que Hilbert volvería a responder escuetamente, por falta de tiempo. En vista de que la discusión epistolar no progresaba, Frege propuso a Hilbert publicar la correspondencia intercambiada, pero Hilbert prefería no hacerlo. En noviembre de 1903 Hilbert escribió a Frege agradeciéndole el envío del tomo Il de sus Grundgesetze e invitándole a ir a Góttingen, a fin de proseguir oralmente sus discusiones, ya que no tenía tiempo para hacerlo por escrito. Pero Frege no aceptó y ahí se acabó el contacto entre ellos. Frege se fue haciendo huraño con el tiempo. No aceptó la invitación de Couturat a participar en el Congreso de Filosofía de París en 1900 ni tampoco la de Russell a tomar parte en el Congreso Matemático de Cambridge en 1912, Prefería el contacto por escrito al personal. En 1903 Frege publicó en el Anuario de la Unión Alemana de Matemáticos dos artículos «Sobre los fundamentos de la geometría» %, en los que recogía y ampliaba sus críticas a Hilbert anteriormente expresadas en sus cartas. Hilbert no se dignó responder, pero A. Korselt replicó a Frege con un artículo ? en el que salía en defensa de Hilbert. En 1906 Frege replicó a su vez a Korselt publicando una serie de tres artículos «Sobre los fundamentos de la geometría» *, en los que sus análisis resultan especialmente lúcidos y profundos, llegando a exponer las características del nuevo método axiomático iniciado por Hilbert de un modo mucho más claro y explícito de lo que nunca lo había hecho el propio Hilbert, pero * G. Frege: «Uber die Grundlagen der Geometric», Jabresbericht der Deutschen Matbematikervereinigung, voi. 12 (1903), pp. 319-324 y 368-375. Reimpreso en G. Frege: Kleine Sebriften led. por J. Angeieli), G. Olms, Hildesheim, 1967, pp. 262-272. 5 A, Korselr: «Uber die Grundlagen der Geometrie», Jabresbericht der Deutschen Maihematikervereinigung, vol. 12 (1903), pp. 402-407. 6 G. Frege: «Uber die Grundlagen der Geometrie» (1, U y 11), Jabresbericht der Deutsehen Matbematikervereinigung, vol. 15 (1906), pp. 293-309, 377-403 y 423-430, Reimpreso en G. Frege: Kleine Schriften led, por |. Angelelli), Hildesheim, 1967, pp. 281-323. 174

_ LA POLÉMICA ENTRE FREGE Y HILBERT ACERCA DEL MÉTODO AXIOMÁTICO ¡€EERdTIOE E A A A A A A A A A A A ms sin llegar a aceptar ni entender la importancia ni el sentido último del proceder hilbertiano. El método axtomático concreto o clásico Hemos dicho que la esterilidad de la polémica entre Erege y Hilbert se debió fundamentalmente a la falta de comunicación, producida por la ambigiiedad y confusión de las palabras empleadas por ambos, que eran las mismas pero se referían a dos concepciones radicalmente distintas del método axiomático: la concepción antigua o tradicional, representada por Frege, y la concepción iniciada por Hilbert y otros matemáticos de su tiempo. La concepción antigua o tradicional del método axiomático aparece ya formulada con toda claridad en los Analíticos Posteriores de Aristóteles y encuentra su plasmación paradigmática poco después en los Elementos de Euclides. Una teoría axiomática, según la entendían Aristóteles y Euclides, es un conjunto de verdades acerca de un ámbito determinado de la realidad, conjunto organizado de tal manera que casi todos los conceptos que intervienen en la teoría son definidos a partir de unos pocos conceptos primitivos, que no se definen, y casi todas las verdades que componen la teoría son demostradas a partir de unas pocas verdades primeras o axiomas, que no se demuestran. Los conceptos primitivos no necesitan ser definidos, pues los conocemos intuitivamente. Y los principios primeros o axiomas no necesitan ser demostrados, pues su verdad es evidente y la captamos por intuición. Aplicar el método axiomático a un ámbito determinado de la realidad consiste en organizar muestro saber acerca de ese ámbito en forma de teoría axiomática. Esta concepción del método axiomático permaneció Baez mente inalterada hasta finales del siglo XIX, si bien algunos detales terminológicos y epistemológicos sufrieron ciertas variaciones. Así, a los principios primeros indemostrados, a los que Aristóteles 1753

A KN eran ¡€

La POLÉMICA ENTRE FREGE Y HILBERT ACERCA DEL MÉTODO AXIOMÁTICO A AA bb AR a AA RL A Las geometrías no euclídeas En la segunda mitad del siglo XIX se había reavivado el interés por el método axiomático, al tiempo que entraban en crisis algunos de sus supuestos tradicionales. Á esta crisis contribuyó poderosamente el desarrollo de las geometrías no euclídeas. Ya Gauss había descubierto la posibilidad de desarrollar geometrías distintas de la euclídea e incompatibles con ella, pero había renunciado a publicar sus resultados por miedo al escándalo de los espíritus obtusos?. Bolyai y Lobatchevski desarrollaron geometrías que tomaban como axioma la negación del axioma euclídeo de las paralelas, y no vacilaron en publicar sus resultados, Así pues, en la segunda mitad del siglo xIx había diversos axiomas sobre las paralelas (correspondientes a teorías geométricas distintas) incompatibles entre sí. “Todos estos axiomas no podían ser verdaderos al mismo tiempo. A lo sumo uno de ellos podía ser verdadero. Entre los geómetras se fue abriendo paso la opinión de que no había más razón para considerar verdadero a uno de estos axiomas que a los otros. Por tanto, ninguno de ellos era verdadero. Y sí el axtoma de las pararelas no era verdadero, tampoco tenían por qué serlo los demás. Así acabó considerándose que los axiomas son unos meros esquemas abstractos, que en sí mismos no son verdaderos ni falsos. Estos desarrollos resultaban inaceptables para los defensores de la concepción clásica del método axiomático, no sólo para los espíritus obtusos [como ya había previsto Gauss), sino incluso para mentes tan agudas como la de Frege. Frege se opuso tenazmente a la nueva tendencia (que cada vez se abría más paso entre los geómetras) a considerar que en la matemática hay sitio para distintas geometrías, que cada geometría describe una estructura abstracta distinta y que ninguna geometría es en sí misma verdadera ni falsa. En su escrito póstumo «Sobre geometría euclídea», redactado durante la época de su polémica con Hilbert, escribe Frege patéticamente: «Nadie puede servir a la vez 7 Véase, por ejemplo, la carta de C. E Gauss a E A. Taurinus de 1824. 177

a dos señores. No es posible servir a la vez a la verdad y a la falsedad. Si la geometría euclídea es verdadera, entonces la geometría no euclídea es falsa; y si la geometría no euclídea es verdadera, entonces la geometría euclídea el falsa. $1 por un punto exterior a una recta pasa siempre una paralela a esa recta y sólo una, entonces para cada recta y para cada punto exterior a ella hay una paralela a esa recta que pasa por ese punto y cada paralela a esa recta por ese punto coincide con ella. Quien reconoce la geometría euclídea como verdadera, debe rechazar como falsa la no euclídea, y quien reconoce la no euclídea como verdadera, debe rechazar la euclídea... Ahora se trata de arrojar a una de ellas, a la geometría euclídea o a la no euclídea, fuera de la lista de las ciencias y de colocarla como momia junto a la alquimia y a la astrología... ¡Dentro o fuera! ¿A cuál hay que arrojar fuera, a la geometría euclídea o a la no euclídea? Ésa es la cuestión» *. La pregunta era retórica, pues para Frege resultaba claro que la geometría euclídea era la única verdadera y que todas las geometrías no euclídeas eran falsas. La postura de Frege frente a las geometrías no euclídeas es compleramente retrógrada y es un síntoma de su falta de comprensión y simpatía hacia las nuevas tendencias que se abrían camino en la matemática. Según el nuevo punto de vista, cada geometría describe una estructura abstracta. Los teoremas de la teoría no expresan de por sí ideas verdaderas o falsas acerca de ningún ámbito determinado de la realidad, aunque sean susceptibles de interpretación en diversos ámbitos. En definitiva, una geometría no es verdadera o falsa, aunque sí es verdadera o falsa la afirmación de que esa geometría es aplicable a un ámbito determinado de la realidad. Alguien podría haber pensado que, a pesar de todo, hay un ámbito privilegiado, el espacio físico, y que la geometría verdadera sería la aplicable en ese ámbito. Pero esta postura tampoco habría aportado consuelo duradero a los defensores a ultranza de la geometría $ G. Frege: Uber Enklidische Geometríe. Publicado póstumamente en G. Frege: Nachgelassene Schrifien (ed. por H. Hermes, E Kambartel y E Kaulbach), Felix Meiner Verlag, Hamburgo, 1969, pp. 182-184, 1/8

 nn AAA oo Dn A euclídea, como Frege. En efecto, pocos años después descubriría Einstein que si identificamos los puntos con las partículas físicas y las rectas con los rayos de luz, entonces resultaba que en el espacio físico así definido lo que se cumple no es la geometría euclídea, sino la geometría de Riemann, que es una geometría no euclídea. ¿De dónde le venía a Frege su seguridad en la verdad de la geometría euclídea? De su concepción kantiana de la geometría, cuyos axiomas se captarían por una intuición pura del espacio. «Al llamar sintéticas a priori a las verdades de la geometría, Kant ha descubierto su verdadera esencia ?.» Pero, al juzgar que Kant había descubierto la verdadera esencia de la geometría, Frege no se equivocaba menos que el mismo Kant se había equivocado cuando juzgó que la lógica había salido perfecta e incapaz de progreso de la mente de Aristóteles. Y lo mismo que la obra de Frege era la refutación más palpable del juicio kantiano sobre la lógica, la obra de los geómetras no euclídeos y de Hilbert era la más palpable refuración del juicio de Frege sobre la concepción kantiana de la geometría. En descargo de Kane habría que decir que éste no podía conocer una lógica que se desarrollaría 100 años más tarde, mientras que Frege sí conocía la geometría no euclídea. En general la actitud de Frege respecto a la geometría es bastante paradójica. Frege, fundador del programa logicista de reducción de la matemática a la lógica, excluye por completo a la geometría de su programa. Y Frege, crítico implacable de la concepción kantiana de la aritmética, acepta sin más y como definitiva la concepción kantiana de la geometría. El método axiomático abstracto o bilbertiano Al mismo tiempo que se daban a conocer las geometrías no euclídeas, un análisis más cuidadoso de los Elementos de Euclides reve2 G. Frege: Die Grundlagen der Aritbmetik, Breslau, 1884, pp. 101-102. Reimpreso en G. Olms Verlag, Hildesheim, 1977. 179

ÁÁÁOO_ A a a ii y ll 00 PCC AAA AI](_/] áÁKÓAKá áI[íPhá A II A a mr mn. laba sus numerosas lagunas, que serían rellenadas en 1882 con la publicación por Moritz Pasch de la primera axiomatización lógicamente satisfactoria de la geometría euclídea. Y diversos matemáticos de la escuela italiana —Piert, Veronese, Peano, etc.-—- habían empezado a propugnar explícitamente una concepción más abstracta del método axiomático. Todos estos fermentos culminaron en 1899 con la publicación por Hilbert de sus Grundlagen der Geometrie. Con Hilbert el nuevo método axiomático alcanza su madurez, al menos respecto a la práctica del mismo. En el capítulo primero de los Grundlagen der Geometrie presenta los axiomas de la geomecría euclídea, divididos en cinco grupos (de incidencia, de orden, de congruencia, de paralelas y de continuidad). Aquí no se hace uso de intuición ni conocimiento previo ninguno, sino que lo único que es lícito suponer de los puntos, rectas y planos, etc., es lo que explícitamente se dice de ellos en los axiomas. A la inversa, cualquier sistema de cosas de las que se pueda decir lo mismo que los axiomas dicen de los puntos, rectas, etc., puede considerarse como un modelo de la geometría. Como Hilbert indica a Frege en su carta del 29-12-1899: «Cada teoría no es sino un tinglado o esquema de conceptos junto con ciertas relaciones necesarias entre ellos, y sus elementos básicos pueden ser pensados arbitrariamente. Si entiendo por puntos, etc., cualquier sistema de cosas, por ejemplo el sistema formado por amor, ley, deshollinador, etc., y considero que todos mis axiomas resultan válidos para esas cosas, entonces también resultan válidos para esas cosas mis teoremas, como, por ejemplo, el de Pitágoras. Con otras palabras: cada teoría puede ser aplicada a una infinidad de sistemas de elementos básicos» **, Grundlagen der Geometrie aportó muchas y notables novedades a la geometría, desde el desarrollo de la geometría plana, y en especial de la teoría de las proporciones, con independencia del axioma arquimediano, cuya prescindibilidad mostró Hilbert, hasta las pruebas de consistencia e independencia ya aludidas, pasando por

10 G. Frege: Wissenschafilicher Briefivechsel, Hamburgo, 1976, p. 67. 150

ia] importantes resultados sobre los teoremas de Desargues y de Pascal. Con la publicación de esta obra se impuso el nuevo método axiomático, y ello a pesar de que Hilbert no exponía en absoluto en qué consistía ese método, limitándose a aplicarlo sin comentarios. Pero, como ha señalado Freudenthal, «en el ejemplo profundamente elaborado de una teoría axiomática, como lo son los Grundtagen, hay una fuerza de convicción infinitamente mayor que en las exposiciones filosóficas y programáticas...» ?". Frege, analista del método hilbertiano Prege, que se oponía frontalmente al nuevo método axiomático, acompañó (sobre todo en sus artículos de 1906) sus críticas de análisis frecuentemente iluminadores y profundos de aspectos del mismo, análisis muy superiores a cuanto el mismo Hilbert había dicho de su propio método. Así, analizando el funcionamiento de las palabras «punto», «recta», etc., en la geometría axiomática de Hilbert, Frege se da cuenta de que dichas palabras son como lugares vacíos que sirven para expresar generalidad, lo mismo que ocurre con las letras en álgebra. E incluso lega a proponer y ejemplificar el uso, de letras para indicar esos lugares, tal y como haríamos ahora. «Si las palabras "punto", "recta; etc., no designan nada, sino que se limitan a indicar generalidad como las letras en la ariemérica, sería muy útil para una más clara comprensión de la situación que empleásemos efectivamente letras con esa finalidad. Vamos a estipular lo siguiente: En vez de "el punto A está en el plano a" diremos "A está en la relación-p con a". En vez de "el punto Á está en la recta 4' diremos "Á está en relación-q con e. En vez de "A es un punto" diremos "A es un 1D 4.» 11H, Freudenthal: «Die Grundilagen der Geometric und die Wende des 19. Jahrhundents»; Marhematisch-Physikalische Semesterberichte, vol. 7 (1961), pp. 16-17. 12 (G. Erege: «Uber die Grundlagen der Geometrie, il», Jabresbericht der Deutschen Matbematiker-Vereínigung, vol, 15 (1906), p. 388. Reimpreso en G. Frege: Kleíne Scbriften (ed. por]. Angelell), Hiidesheim, 1967, pp. 304-305. 181

 Analizando las múltiples interpretaciones a que Hilbert somete sus conceptos, Frege propone comparar la teoría axiomática de Hilbert con un sistema de ecuaciones con varías incógnitas. Cada sistema de conceptos que satisface la teoría es como una solución de esas ecuaciones '*. Con esto Frege se acerca mucho a la posterior aclaración de la situación por Tarskt en función del concepto de modelo. Pero Frege se deja llevar por su espíritu polémico, preguntándose: «¿Quién nos dice que este sistema de ecuaciones tenga alguna solución y que ésta sea unívoca?» *%, Que el sistema tiene alguna solución debería estar claro para Frege, pues Hilbert mismo la ha presentado en el modelo aritmético que le sirve para probar su consistencia. Pero la solución no es, ni pretende ser, unívoca. Precisamente en la multiplicidad de soluciones, interpretaciones o modelos ve Hilbert —y con él toda la matemática posterior-——— la principal ventaja del nuevo método AXIOMÁLICO. Frege es un crítico implacable del uso más bien confundente que Hilbert hace de las palabras «definir» y «definición», que tan pronto emplea en el sentido de definiciones nominales explícitas -—como cuando define el triángulo—- como en el sentido de determinación mediante los axiomas. Contra las definiciones explícitas Frege no tiene nada: son meras estipulaciones. Pero se niega a aceptar que los axiomas definan —implicitamente, se diría luego, aunque la expresión no es de Hilbert-— los conceptos (de primer orden) de punto, recta, plano, ... incide CON..., ... es coñgruente CON..., ... está entre... y... como pretendía Hilbert. En esto tenía razón Frege. Pero Hilbert veía claro que con sus axiomas algo quedaba definido, aunque no sabía expresarlo bien. El propio Frege se lo articuló mejor en su carta de 6 de enero de 1900, cuando le escribe: «Me parece que lo que usted en realidad quiere definir son conceptos de segundo orden, pero que usted no los distin13 (, Frege; «Uber die Grundlagen der Geometrie», Jabresbericht der Dentschen Mathematiker-Vereinigung, vol. 12 (1993), p. 370. Reímpreso en G. Frege: Kleine Scbrifien, Hildesheim, 1967, p. 268, 4 Tbídem. 182

A gue claramente de los de primer orden» *. En efecto, los axiomas de Hilbert definen algo —como él decía—-, pero:lo que definen —y no implícita, sino explícitamente— no son los conceptos de primer orden de punto, recta, etc., sino el concepto de segundo orden de espacio euclídeo, o, como hoy diríamos, la estructura abstracta de espacio euclídeo. Aquí como en tantas otras cosas Frege podía hacer aportaciones esenciales al desarrollo, aclaración y explicitación del nuevo método axtomático, con lo que se hubieran quemado etapas que luego costaría arduos esfuerzos y largo tiempo recorrer. Pero el carácter polémico y huraño de Frege, unido a una cierta altivez de Hilbert, condujeron la polémica al estéril marasmo en que acabó. Consistencia En el capítulo segundo de sus Grundlagen ofrece Hilbert una prueba de-la consistencia de sus axiomas, indicando un modelo numérico, es decir, un sistema de cosas que satisfacen todos los axiomas de la teoría y donde los puntos son ciertos pares de números algebraicos, las rectas, ciertos tríos de números algebraicos, donde la incidencia de una recta con un punto quiere detir la validez de una cierta ecuación numérica, etc. Con esto queda probada la consistencia de los axiomas, no la consistencia absoluta, claro, pero sí la consistencia relativa al análisis matemático. - | La falta de comprensión por Frege del nuevo método se manifiesta en sus críticas a la prueba de consistencia de Hilbert, a quien echa en cara el cambio de significado de palabras como «punto», que en el libro de Hilbert tan pronto significan punto como par de números algebraicos (que es algo muy distinto), etc. Hilbert, por el contrario, ve en esa multiplicidad de interpretaciones la principal ventaja del nuevo método axiomático. Frege considera completamente inútil ofrecer una prueba de 15 G. Erege: Wissenschafilicher Briefwechsel, Hamburgo, 1976, p. 74. 183

consistencia de los axiomas, pues la consistencia se sigue de la verdad y los axiomas son por definición verdaderos. Frege escribe a Hilbert: «Llamo axiomas a los enunciados verdaderos, pero indemostrados... De la verdad de los axiomas ya se sigue que éstos no se contradicen entre sí. Por tanto eso no requiere prueba alguna adicional» '*. Como señala Dummett ”, no deja de resultar irónico que Frege dijera esto precisamente poco antes de que Russell descubriese que los axiomas del propio Frege eran contradictorios. Pero Frege mantuvo hasta el final su concepción tradicional de la verdad de los axiomas y de la superfluidad de las pruebas de consistencia de los mismos. En su carta de respuesta a la citada de Frege, Hilbert responde a la objeción fregeana de que no es necesario probar la consistencia de los axiomas, pues ésta se sigue de su verdad: «Siempre que yo pienso, escribo y hablo sobre estos temas, cada vez digo precisamente lo contrario: Si los axiomas arbitrariamente establecidos, junto con sus consecuencias, no se contradicen entre sí, entonces son verdaderos, entonces existen las cosas definidas por los axiomas. Éste es para mí el criterio de la verdad y de la existencia» **. La manera de expresarse de Hilbert no es correcta. Si los axiomas no son contradictorios, son consistentes, pero no verdaderos. Los axiomas abstractos en el sentido de Hilbert no son el tipo de entidad de la que pueda predicarse la verdad o falsedad. ¿Qué decir de su segunda afirmación, la de que de la consistencia de los axiomas se sigue —en terminología actual— la existencia de un modelo? Hoy sabemos que toda teoría consistente de primer orden posee un modelo. Por tanto Hilbert tenía parte de razón. Pero no tenía toda la razón, pues su geometría axiomatizada era una teoría de segundo orden (por el axioma de continuidad) y no ocurre que toda teoría consistente de segundo orden tenga un modelo. De ¡6 G. Frege: Wissenschafilicher Briefwechsel, Hamburgo, 1976, p. 63. 7 M, Dummett: Frege on the Consistency of Mathematical Theories. En M. Schirn (ed.): Studien zu Frege L Logik und Philosopbie der Mathematik, Froramann-Hoizboog, Stuttgart, 1976, p. 241. 'S En G. Frege: Wissenschaftlicher Briefwechsel, rlamburgo, 1976, p. 66. 184

 todos modos, si aceptamos modelos generales no estándar de segundo orden, entonces sí que también cada teoría consistente de segundo orden tiene un modelo, pero es dudoso que Hilbert los aceptase o pudiese pensar siquiera en ellos. Dummett ha escrito que «cuando nos las habemos con una teoría genuina, es decir, una para la que tenemos una interpretación determinada, bajo la cual creemos que sus axiomas son verdaderos, no tiene sentido hablar de que encontramos un tal modelo (es decir, uno que sirva para probar su consistencia), pues ya tenemos un modelo» '". Esto parece una defensa de la postura de Frege, pero no lo es. Dummett se refiere a la aritmética, no a la geometría. Y en el caso de la geometría euclídea, que es el que nos ocupa, no poseemos tal modelo (el candidato más obvio, que sería el espacio físico, no lo es o al menos es muy discutible que lo sea). De ahí el interés en buscar un tal modelo en zonas más seguras, como pueda ser el análisis matemático (restringido a números algebraicos). Independencia Su concepción abstracta del método axiomático permite a Hilbert ofrecer pruebas de independencia de sus axiomas, probando que cada axioma es independiente de los demás mediante la indicación de un sistema que satisface a los demás axiomas, pero no a aquel cuya independencia se trata de probar. Con lo cual, al tiempo que prueba la independencia del axioma de las paralelas, prueba la consistencia de la geometría no euclídea (relativa a la euclídea). El proceder de Hilbert en sus pruebas de independencia es Irreprochable, pero Frege no las aceptaba, pues le echaba en cara el uso de modelos en que algún axioma resultaba falso, lo cual sería absurdo, pues un axioma no puede ser falso. 9 M, Dummett: Erege on the Consistency of Mathematical Theories. En M. Schrin (ed): | Studien zu Frege [. Logik: und Philosophie der Mathemasik, Svatugart, 1976, p. 242... 185

En 1900 y 1903 Frege se limita a rechazar las pruebas hilbertianas de independecia. Pero luego dedica mayor atención al tema y en sus artículos de 1906 llega a hacer propuestas constructivas al respecto. Empieza por definir la independencia de una idea o proposición respecto a otras como la imposibilidad de inferir la primera a partir de las últimas en un número finito de pasos?". (Esto, sabemos hoy, sólo es aceptable si el cálculo es suficiente —o semánticamente completo —, lo cual no es el caso del de Frege ni de ninguno de segundo orden.) Luego Frege, adelantándose a Tarski, constata que con las pruebas de independencia se inicia una nueva actividad en la matemática, lo que luego se llamaría la metamatemática. «¿Cómo podemos probar la independencia de una proposición respecto de un grupo de otras proposiciones? Lo primero sobre lo que hay que llamar la atención es que con esta pregunta penetramos en un territorio que hasta ahora ha sido ajeno a la matemática. Pues aunque la actividad matemática como la de cualquier otra ciencia se realiza mediante proposiciones, las proposiciones mismas no son por lo demás objeto de su consideración, También la independencia de una proposición respecto a un grupo de proposiciones es distinta de las relaciones que normalmente son objeto de la investigación matemática...» ? Á continuación Prege propone un método para probar la independencia de proposiciones ". El método para probar que una proposición o idea a es independiente de x ideas f, ... Ú_ consiste en sustituir las constantes no lógicas que aparecen en Q, B, ... £_ por otras constantes distintas de la misma categoría tales que B dE B. se transforman en ideas verdaderas y a en una idea falsa. Lo cual, como ya señaló Steimer %, es equivalente al proceder hilbertiano, 9 G. Frege: «Uber die Grundlagen der Geometrie, ll», Jabresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, vol. 15 (1906), pp. 423-424. Reimpreso en G. Frege: Kleíne Sebrifien, Hildesheim, 1967, p. 318. "1 ibídem. Reimpreso en G. Frege: Kleine Schriften, p. 320. " ibídem. Reimpreso en G. Frege: Kleine Schrifien, pp. 321-322. FL G. Steiner: «Frege und die Grundlagen der Geometrie, ll», Mathematisch-Physiralische Semesterberichte, vol. 11 (1964), p. 42. 186

LA POLÉMICA ENTRE FREGE Y HILBERT ACERCA DEL MÉTODO AXIOMÁTICO A A A A A A A aunque Frege parece no haberse dado cuenta de ello. En cualquier caso aquí abandonó sus, por lo demás, muy prometedoras reflexiones sobre el tema. Deducción En una teoría axiomática abstracta los teoremas se prueban a partir de los axiomas según las reglas de inferencia establecidas y sin tener en cuenta para nada las posibles interpretaciones de los mismos. Lo único que una tal prueba nos garantiza entonces —si las reglas son correctas— es que cada interpretación que satisfaga los axiomas —-que los convierta en ideas verdaderas—- satisfará también los teoremas —los convertirá igualmente en ideas verdaderas. Esta manera abstracta y formal de proceder es descrita correctamente por Frege «como sí hubiera que probar una mera formulación que no exprese idea alguna, y como si luego hubiera que asignar a esa formulación ideas distintas en dominios distintos». Pero a continuación añade: «¡Absurdo! Una mera formulación sin contenido no puede ser orobada» % Frege no admite las pruebas absitacas por dos razones. En primer lugar, porque parten de axiomas abstractos o -—eomo él dice— pseudoaxiomas, que no expresan idea alguna, mientras que una inferencia sólo puede partir de una idea y llevar a otra. «De que los pseudoaxiomas no expresan idea alguna se sigue además que no pueden ser premisas de una cadena de inferencias... Con los pseudoaxiomas no tenemos todavía ninguna idea y, por lo tanto, tampoco premisa alguna ”.» En segundo lugar Frege no acepta la inferencia basada en las solas reglas de inferencia, capaces de aplicarse a meras formulaciones, sino que exige que la inferencia se base en actos psíquicos de juicio. «Una inferencia no 24 G. Frege: «Úber die Grundlagen der Geometrie, Il», Jabresbericht der Deiba Mathematiker-Vercinigung, vol. 15 (1906), p. 385. Reimpreso en G. Frege: Kleíne Schriften, Hildeskeima, 1967, p. 302. ?5% Tbídem. Reimpreso en G. Frege: Kleine Schrifien, p. 306. 187

 e pertenece al campo de los signos, sino que es un acto de enjuiciamiento [Urteitsfállurg], que se realiza sobre la base de juicios anteriores según las leyes lógicas. Cada premisa es una idea reconocida como verdadera y en el juicio inferencial se reconoce igualmente una cierta idea como verdadera .» Como ha señalado Resnik ", de ahí se sigue que no se puede hacer una inferencia a partir de una premisa cuya verdad no se reconoce y que la inferencia lógica pierde su intersubjetividad. Sí fulano acepta a como verdad, puede inferir a v B a partir de a. Si mengano no acepta A como verdad, no puede inferir ad V f a partir de a. La inferencia lógica pasa así a depender de hechos psíquicos subjectivos, tales como el de que alguien acepte o no la verdad de una idea. Como el mismo Resnik ha indicado *, con esto cae Frege en el psicologismo, que él tanto había combatido, y abandona sin darse cuenta su principio de separación tajante entre lógica y psicología. (Y además, como ha señalado P. Geach", en el suplemento a Grundeesetze 11 el mismo Frege se ve obligado a realizar —y realiza—- inferencias a partir de premisas no aseveradas.) Es curioso que Hilbert, utilizando palabras cargadas de significado intuitivo — punto", tecta, etc,—, pretenda emplearlas como signos vacíos de significación, ¿nhaltsleer, y que, careciendo de un cálculo deductivo o de reglas de inferencia explícitamente formuladas, pretenda proceder de un modo formal y abstracto en sus deducciones, mientras que Frege, empleando signos y expresiones formalizadas, pretende escribir enunciados de significación unívoca, inbaltlich, y, disponiendo de un cálculo deductivo formal perfectamente desarrollado, pretenda limitarse a registrar la cadena de juicios por la que un sujeto va reconociendo la verdad de ciertas ideas. 2% Tbídem. Reimpreso en G. Frege: Kleine Schriften, pp. 303-304, 22 M, D. Resnik: «The Frege-Hilberr Controversy», Philosophy and Phenomenological Research, vol. 34 (1973-74), pp. 386-403. Publicado en alemán en M. Schirn fed.): Studien zu Frege [Logik una Philosophie der Marhemarik, Svarrgare, 1876, p. 210. £ Ibídem. Véase M, Schitn (ed): Studien zu Frege L pp. 211-212. 2 P Geach: Second Order Quantification in Frege. Simposio sobre Lógica y Filosofía en Frege, celebrado en Peñíscola en noviembre de 1979, 188

LA POLÉMICA ENTRE FREGE Y HILBERT ACERCA DEL MÉTODO AXIOMÁTICO A a a A A A A A A A a e a a A A a a A A A 1 A A — __-------4 + En realidad Frege podría haber aportado a las deducciones formales abstractas de Hilbert el soporte de un sistema explicitado de reglas de inferencia que aquéllas requerían para su perfección. Pero Frege prefirió polemizar, en vez de colaborar en la empresa hilbertiana, y Hilbert no echó mano del cálculo de Frege, sino que acabó desarrollando el suyo propio treinta años más tarde, aunque reconociendo la primacía de Frege en este campo. Teorías concretas y abstractas La polémica resultó estéril, a pesar de que entre sus dos protagonistas ya poseían todos los prerrequisitos necesarios para zanjarla mediante un salto hacia adelante. Pasaron los años, Frege murió y Hilbert acabó dándose cuenta de que en realidad Frege y él habían estado hablando de cosas distintas. Así, en la introducción al tomo Í de sus Grundlagen der MathematirY, publicado en 1934, Hilbert distingue claramente entre lo que lama allí inhaltliche Axtomatik y formale Axiomatik, o, como diríamos nosotros, entre teorías concretas y teorías abstractas. Cuando él había hablado antes de teoría, se refería siempre a las teorías abstractas, mientras que Frege lo hacía a las concretas. Por eso no se entendían y la polémica fue un diálogo de sordos. ? Según Hilbert, el desarrollo consecuente del método axiomático conduce a las teorías abstractas, tanto en la matemática como en la física. Ya en su carta a Frege del 29-12-1899 Hilbert señala que «naturalmente todos los teoremas de una teoría elecrromagnética son también válidos para cada sistema de cosas que pongamos en lugar de la electricidad, el magnetismo, etc., siempre que resulten satisfechos los correspondientes axiomas» %, Y 35 años más tarde, en Grundlagen der Mathematik, pone como ejemplos de 30D. Hilbert y E Bernays: Grunalagen der Matbematik 1 Springer-Verlag, Berlín-Hejdelberg, 1934 (2.* edición, 1968), p. 2. 32 G.Frege: Wissenschafilicher Briefwechsel, Hamburgo, 1976, p. 67. 189

teoría axiomática abstracta, junto a la geometría euclídea, la mecánica de Newton y la termodinámica de Clausius*, E incluso postula la necesidad de probar la consistencia de las teorías abstractas de la física mediante la indicación de modelos aritméticos de las mismas >, Pero en definitiva ¿qué es una teoría abstracta y qué es una teoría concreta? ¿En qué se diferencian? La ontología fregeana puede ayudarnos a responder a esta cuestión. Como es bien sabido, las categorías fundamentales de la ontología de Frege son las de objeto y función ?*. Todo lo que hay o es objeto o es función. Un objeto es algo completo o saturado —

 saber, un conjunto de proposiciones (verdaderas o falsas) sobre un cierto sistema. Una teoría abstracta, por el contrario, no sería un objeto, sino una función, a saber, una función que tiene como dominio de definición el conjunto de los sistemas homólogos con ella y tal que a cada sistema homólogo aplica unfvocamente una teoría concreta determinada. A la teoría concreta que la teoría abstracta aplica a un sistema dado se la llama también la interpretación de esa teoría abstracta en ese sistema. | Una teoría abstracea es una función compuesta. Cada una de las fórmulas que la componen es a su vez una función que a cada sistema homólogo aplica unívocamente una idea o proposición. Según que esa idea sea verdadera o falsa, decimos que el sistema satisface o no esa fórmula. El conjunto de las ideas que las diversas fórmulas de la teoría abstracta aplican a un sistema determinado constituye precisamente la teoría concreta que esa teoría abstracta aplica a ese sistema (o, equivalentemente, la interpretación de esa teoría abstracta en ese sistema). Y sí la teoría concreta aplicada por la teoría abstracta es verdadera (es decir, si todas sus ideas lo son), entonces decimos que ese sistema es un modelo o realización de esa teoría abstracta. | Como vemos, no sólo a nivel sintáctico, metodológico y semántico, sino incluso a nivel ontológico Frege poseía los instrumentos conceptuales para obtener una clarificación del método axiomático abstracto. Desde su polémica con Hilbert ha llovido mucho y mucho se ha progresado. Pero la completa clarificación de lo que sea una teoría abstracta y una concreta y de las interrelaciones entre ambas —-canto en la matemática (donde las cosas se han aclarado bastante, gracias al desarrollo de la teoría de modelos) como en la física (donde el asunto apenas ahora empieza a ser investigado) y aun en otros campos— sigue constituyendo un reto para cualquier filosofía rigurosa de la ciencia.

CAPÍTULO 8 HISTORIA Y TEORÍA ABSTRACTA Sistema y estructura Voy a sostener la tesis de que toda teoría es matemática. Naturalmente esta tesis sólo es defendible si usamos la palabra teoría en cierto sentido !, pero no en otros. | Se ha cometido un crimen y enseguida circulan diversas teorías acerca de quién haya sido el asesino o de cuáles hayan sido sus motivos. Evidentemente estas teorías no tienen nada de nrátemáticas. Son meras hipótesis acerca de ciertos individuos concretos, sus relaciones y sus motivos. Nosotros no vamos a llamarlas teorías. Vamos a llamarlas historias o, mejor dicho, hipótesis históricas. La palabra historia suele usarse frecuentemente en un sentido sumamente restringido, como teniendo que ver únicamente con los asuntos humanos y su ordenación temporal, Nosotros vamos a usar historia en un sentido mucho más amplio, que además es su sentido originario. La historia, así entendida, trata de todo tipo de asuntos, humanos o no humanos, y no tiene por qué ser temporal, ' En el capítulo anterior hemos establecido la distinción entre teorías concretas y teorías abstractas. En este capítulo usaremos siempre la palabra teoría en el sentido de teoría abstracta, 193

- CONCEPTOS Y TEORÍAS EN LA CIENCIA En toda ciencia hay un componente histórico y otro teórico, hay historia y teoría. Tanto la historia como la teoría son de algún modo tinglados lingúiísticos, descripciones. ¿Descripciones de qué? Una historia es la descripción de un sistema. Una teoría es la descripción de una estructura. De momento quizá esto no resulte muy iluminador, dado el uso confuso e intercambiable que suele hacerse de las palabras sistema y estructura. Por sistema, a veces, se entiende sencillamente conjunto, como cuando se llama sistema de ecuaciones a un conjunto de ecuaciones. Otras veces por sistema se entiende método, como cuando nos hablan del mejor sistema para dejar de fumar. En algunos contextos se usa sistema como sinónimo de lo que aquí llamaremos estructura, como en el caso de los sistemas cristalinos (monoclínico, triclínico, etc.) en cristalografía. En otros muchos casos, finalmente (y es el uso que aquí vamos a retener), por sistema se entiende un conjunto bien delimitado de objetos, junto con ciertas propiedades, posiciones e interrelaciones bien definidas entre los mismos. Así, hablamos del sistema bancario español, del sistema monetario internacional, del sistema solar, del ecosistema del lago Baikal o del sistema relacional formado por los números enteros y la relación menor que entre ellos. La palabra estructura se emplea a veces para designar el conjunto de vigas y columnas de un edificio, como cuando se dice de él que tiene una estructura metálica. En la lógica matemática se usa estructura" por bastantes autores como sinónimo de lo que aquí llamamos sistema. En la mayor parte de los casos, finalmente —y éste será el sentido que aquí retendremos— se emplea estructura 2 La palabra estructura se usa frecuentemente de un modo ambiguo en la lógica y en la matemática. Por un lado se llama estructura a lo que aquí llamamos sistema, por ejemplo, a un grupo concreto. Por otro lado se llama estructura a lo que aquí llamamos estructura, por ejemplo, a lo que tienen en común todos los grupos, la estructura de grupo. Algunos autores tratan de distinguir ambas nociones, llamándolas respectivamente estructura y especie de estructura, o estructura concreta y estructura abstracta. En este capítulo usaremos siempre la palabra estructura en el sentido de estructura abstracta (o especie de estructura). 194

 A para referirse a ciertos rasgos más o menos formales comunes a varios sistemas. Así hablamos de la estructura del átomo de helio (es decir, de algo que tienen en común todos los átomos de helio), de la estructura hexagonal que con frecuencia se encuentra en los paneles de miel, de la estructura de un compuesto químico (expuesta en su fórmula estructural), de la estructura radial de los equinodermos, de la estructura alfabética de ciertas enciclopedias, de la estructura de grupo que tienen muchos sistemas matemátiCOS, etc. En el sentido en que aquí usamos estas palabras, una estructura es algo más abstracto que un sistema. En cierto modo podemos decir que un sistema es una cosa, aunque se trate de una cosa sumamente compleja. Siguiendo una tradición de vieja prosapia platónica, podemos llamar formas a los rasgos comunes a varias cosas. Las formas son así más abstractas que las cosas. Pues bien, si los sistemas son cosas, las estructuras son las formas de esas cosas, las formas de los sistemas. Naturalmente una misma cosa puede tener varias formas (de animal, de gato, de hembra, de cuadrúpedo, de pelaje pardo moteado de gris, etc.), y de igual modo un mismo sistema puede tener varias estructuras. Por ejemplo, el sistema formado por los números enteros y la adición tiene estructura de semigrupo, de grupo, de grupo abeliano, etc. Historia y teoría Después de haber indicado de un modo provisional el sentido en. que vamos a emplear las palabras sistema y estructura, podemos volver a las nociones de historia y teoría. La noción clásica de historia era muy amplia. Para Aristóteles lo peculiar de la historia consiste en que se ocupa de lo particular. Desde luego, la historia, tal como la concebían los griegos y los romanos, no tenía por qué ser temporal-ni tenía por qué ocuparse de los asuntos humanos. Al estudio temporal de los asuntos humanos lo llamaban crómica. La crónica es un tipo de historia entre 195

CONCEPTOS Y TEORÍAS EN LA CIENCIA (€

su tiempo. Su historia fue ampliada y publicada por Kepler en sus Tablas rudolfínas en 1627. A diferencia de Brahe, Kepler no era sólo un historiador, sino también un teórico, pero nunca habría podido construir su teoría sin la ayuda de la historia astronómica de Brahe. Con la introducción del telescopio óptico, las observaciones a ojo desnudo de Brahe y Kepler podían ser mejoradas, y a esa tarea dedicó su vida el primer astrónomo real de Inglaterra, Plamsteed, cuya historia estelar suministró nuevos datos que fueron tenidos en cuenta por otros teóricos, en especial por Newton. La sistemática biológica entera, desde Linné, que estudiaba «el sistema de la naturaleza», hasta nuestros días, es básicamente una historia de la naturaleza. Todas las estadísticas son historia. Y todos los experimentos pertenecen a la metodología de la historia, no de la teoría. En definitiva en todas las ciencias, tanto sociales como naturales, la mayor parte del trabajo se dedica a establecer la historia del sistema en cuestión, a recoger datos históricos, a enunciar hipótesis históricas, a tratar de describir la realidad. Así como la palabra historia siempre ha estado asociada con la descripción de lo particular, la palabra teoría siempre ha subrayado la generalidad de lo tratado. Según Aristóteles no hay teoría de lo particular, sino sólo de lo universal. De todos modos el sentido con que vamos a usar aquí la palabra teoría es moderno, y no aparece explícitamente formulado hasta Hilbert. Hilbert fue el primero que supo dar cuenta de la revolución producida por el desarrollo de las geometrías no euclídeas. Su concepción de una teoría geométrica, que pronto generalizó a cualquier teoría matemática o física, es el punto de partida de la concepción aquí expuesta. La idea fundamental de Hilbert estriba en que la geometría euclídea no es la descripción del espacio físico, ni de la intuición espacial humana (como había pensado Kant), ni de ninguna realidad concreta. En definitiva, la geometría euclídea no es una historia, sino una teoría, la descripción de una estructura abstracta, estructura que puede realizarse o no realizarse en el espacio físico, en la intuición bumana, etc, Por eso puede haber tantas geometrías distintas e incompatibles entre sí, tantas como estructuras abstractas seamos capaces de 197

definir, con independencia de cualquier realidad. Y esta situación no implica contradicción alguna, pues los teoremas de que se compone la teoría no son verdaderos ni falsos, a diferencia de las ideas de que se compone la historia, que sí son verdaderas o falsas.
Sistemas homogéneos y heterogéneos La realidad está frente a nosotros, tras nOSOtFos, en MOSOtros, Fodeándonos, muda, opaca, mostrenca, sobrecogedora, pero inarticulada. Si queremos describir alguna parcela de la realidad, estudiarla, historiarla, hemos de empezar por definirla o delimitarla de algún modo. Esta delimitación puede efectuarse de diversas maneras. A cada una de esas maneras de deliminar una parcela de la realidad corresponde un sistema distinto. Para definir un sistema hay que indicar el conjunto (o conjuntos) de cosas de que vamos a hablar y que constituirán el dominio o universo (o universos) del sistema, así como las relaciones entre esas cosas en que vamos a fijarnos. Esto puede realizarse desde muy diversos puntos de vista, incluso habiéndonoslas con una misma parcela de la realidad. Supongamos que nos encontramos con una máquina expendedora de paquetes de cigarrillos. Por un lado, podemos considerar que el universo de ese sistema está formado por una serie de palancas, resortes, piezas metálicas y cajetillas, interrelacionadas entre sí por ciertas relaciones mecánicas. Por otro lado, podernos considerar que el sistema que nos interesa está formado por las entradas (introducir una moneda por la ranura, apretar un botón, etc.) de la máquina, sus salidas (devolver la moneda, expender un paquete de cigarrillos, etc.), sus estados internos (cargada, vacía, etc.) y ciertas relaciones entre sus entradas, estados y salidas. Al comerciante y al consumidor les interesa sobre todo este segundo sistema. Al fabricante de la máquina o al mecánico que la repara les interesa más el primer sistema. De algún modo ambos sistemas son diversos aspectos de una misma realidad subyacente: la máquina expendedora. Pero no podemos 198

... FXISTORIA Y TEORÍA ABSTRACTA estudiar las realidades subyacentes en sí, con independencia de toda delimitación, definición, caracterización O punto de vista. Sólo podemos estudiar la realidad delimitándola de algún modo, articulándola de alguna manera, decidiendo qué aspectos de ella vamos a tomar en consideración. En el ejemplo anterior, una misma parcela de la realidad era considerada desde dos puntos de vista, dardo lugar a dos sistemas con universos distintos. Pero incluso considerando la misma parcela de la realidad como constituida por el mismo universo, sigue siendo posible definir sobre ese universo sistemas distintos. Basta con considerar relaciones diferentes entre los elementos de ese universo. Así, por ejemplo, podemos considerar varios sistemas sociales que tengan como universo común el conjunto de los habitantes de una determinada isla. Si nos fijamos en sus edades y en sus interrelaciones de coetancidad, obtendremos un sistema (por ejemplo, una pirámide de edades) distinto que si nos fijásemos en sus ingresos, gastos, ahorros, consumo, etc. (en cuyo caso obrendríamos un cierto sistema económico). También podemos interesarnos por sus relaciones de parentesco biológico o de parentesco jurídico, o por sus relaciones afectivas y sentimentales, o por los grupos sanguíneos de la población, o por las relaciones de prioridad protocolaria que se manifiestan en el lugar ocupado por los habitantes en ciertas ceremonias. Todas estas distintas relaciones dan lugar a sistemás distintos. También podemos combinar varias de ellas en un nuevo sistema más complejo. Lo único importante es que especifiquemos claramente en cada caso qué conjunto (o conjuntos) de cosas vamos a considerar como universo (o universos) del sistema y en qué relaciones (y funciones, propiedades o posiciones) vamos a fijarnos explícitamente. Con ello quedará definido el sistema. -. Un sistema con un solo universo es un sistema homogéneo. Un sistema con varios universos es un sistema heterogéneo. e Precisemos un poco más. Un sistema homogéneo es un conjunto ordenado, formado por una clase no vacía, A, llamada el universo del sistema, y una secuencia de entidades distinguidas, es decir, de individuos de 4, de propiedades de individuos de 4, de relacio199

nes entre individuos de A y de funciones entre individuos de 4. Desde luego no es necesario que haya entidades distinguidas de todos estos tipos. Sea H el conjunto de los habitantes de una isla determinada, sea P la relación de progenitura (en que están los progenitores —-———padres o madres— con sus infantes), sea O, A, By AB las propiedades de tener el correspondiente grupo sanguíneo. Entonces (44; P)> es un sistema de progenitura entre los habitantes de la isla, es un tercer sistema, distinto de los dos anteriores, de los que es una expansión. Un sistema heterogéneo es un conjunto ordenado formado por varias clases no vacías A, ... A,, llamadas los universos de sistema, y una secuencia de entidades distinguidas, es decir, de individuos de alguno de los universos, de relaciones entre individuos del mismo o de distintos universos y de funciones entre individuos del mismo o de distintos universos. No es necesario que se den entidades distinguidas de todos esos tipos. Sea EH el conjunto de habitantes de la isla, sea Tun intervalo de tiempo, sea IX el conjunto de los números reales, sea e la función de Hx Ten R que a cada habitante y a cada instante asigne la edad de ese habitante en ese instante (medida en segundos) y sea p la función de Hx Ten IR que a cada habitante y a cada instante asigna el peso (medido en gramos y a nivel del mar) de ese habitante en ese instante. Entonces (4, T, ¡R; e) es un sistema heterogéneo (con tres universos, H, Ty |R, pues en él consideramos a la vez habitantes, instantes y números reales), el sistema de la población de la isla considerada en cuanto a sus edades en un intervalo de tiempo dado.

A A a A A e _— e KK A A El sistema (4, TR; e, p> es un sistema heterogéneo distinto que el anterior, del que constituye una expansión. Desde un punto de vista formal, todo lo que puede describirse como sistema heterogéneo puede describirse también como sistema homogéneo. El universo del nuevo sistema homogéneo será la unión de los diversos universos del sistema heterogéneo, y a las entidades distinguidas del viejo sistema heterogéneo habrá que añadir ahora como propiedades los viejos universos. Así, el sistema heterogéneo KA, Ajos As Emo, E >, donde A, Aseos, A, son universos cualesquiera y £,,..., E_ son entidades distinguidas cualesquiera de (o entre) esos universos, da lugar al sistema homogéneo ANA SA a E). Ambos sistemas no son sino descripciones distintas de la misma realidad subyacente. El hecho de que una parcela de la realidad constituya un sistema homogéneo o heterogéneo no depende de la realidad misma, sino de nuestra convencional manera de describirla. Sin embargo, ello no es óbice para que desde un punto de vista pragmático haya diferencias entre ambos enfoques. Y con frecuencia la consideración del sistema heterogéneo es más natural e intuitiva que la del correspondiente sistema homogéneo. Esté dado un sistema con un universo A, con una propiedad ?P y una relación binaria R. Para pensar en ese sistema necesitamos de conceptos correspondientes a A, Py R. Para hablar o escribir sobre ese sistema necesitamos de palabras Ccorrespondientes a esos conceptos. Si esas palabras ya existen en nuestro lenguaje ordinario, las tomamos de él y ya está. Si no existen, introducimos palabras nuevas como términos técnicos para expresar esos conceptos. Todas esas ideas o proposiciones sobre Á que podemos formar usando los conceptos correspondientes a Py R son ideas históricas sobre A. La totalidad de las ideas históricas sobre Á que son verdaderas constituye la verdadera y completa historia del sistema (4; P, R>. Naturalmente no llegamos a pensar o formular todas esas ideas, sino sólo una parte. Nuestra historia del sistema no suele ser la historia completa del sistema, sino:sólo una historia parcial. Y con frecuencia no estamos seguros de que nues201

 o tras ideas históricas sobre el sistema sean verdaderas; nos limitamos a aceptarlas como hipótesis más o menos plausibles. Nuestra historia del sistema no suele ser la verdadera historia completa, sino una historia hipotética y parcial. Lo cual no significa que no pueda haber historias seguras. La tabla de multiplicar constituye una historia parcial, pero seguramente verdadera, del sistema formado por los números naturales y la multiplicación. Un sistema es algo extralingiístico (aunque delimitado por medios lingiiísticos), es un trozo de realidad considerado bajo cierto ángulo. La historia de un sistema, por el contrario, es algo lingúíístico (en un sentido amplio de lo ingúñístico, que no sólo incluye las proferencias sonoras o las inscripciones gráficas, sino también las ideas expresadas en dichas proferencias o inscripciones). En definitiva, qué sistema estemos considerando depende de qué conceptos estemos empleando en nuestra historia. Al añadir nuevos conceptos a nuestra historia, estamos cambiando de sistema, estamos pasando a una expansión del sistema previamente considerado. Pero una vez determinado el sistema y fijados los correspondientes conceptos de nuestra historia, el que nuestras ideas históricas sobre ese sistema sean verdaderas o falsas depende enteramente del sistema mismo y no de nosotros. La historia tiene vocación de verdad objetiva, la historia es ciencia y no literatura. Precisamente al rasgo del sistema que determina la verdad de una cierta idea de su historia lo llamamos un hecho, el hecho correspondiente a esa idea, el pendant objetivo de la idea verdadera, el correlato ontológico de la relación semántica de verdad. | La historia de un sistema no tiene por qué ser un mero registro de datos singulares. También podemos expresar ideas complejas acerca del sistema, podemos generalizar, podemos expresar meras hipótesis y refutar o confirmar viejas conjeturas, podemos descubrir regularidades y excepciones, predecir y retrodecir, hacer inferencias estadísticas y extrapolar. Lo único que se requiere es que se trate de ideas construidas con los conceptos de la historia del sistema, correspondientes a los universos y entidades distinguidas del sistema en cuestión. 202

am. A AA A Conceptores y teoremas La tarea de caracterizar las nociones de estructura y teoría es más ardua que la de caracterizar las de sistema e historia. Hay un salto cualitativo importante entre ambos pares de nociones, pero ese salto no se capta a primera vista, por lo que la confusión de ambos niveles se da con frecuencia. El sisterna neurosensorial de los animales superiores, y en espe- | cial el nuestro, realiza automáticamente una portentosa cantidad de "cálculos" cromáticos, estereométricos y paralácticos, que nos permiten convertir la confusa y constantemente fluctuante variedad de colores, dimensiones y contornos que captan nuestros sentidos en las formas y colores estabilizados que percibimos en nuestra mente (es decir, en los centros perceptivos de nuestro cerebro). Esta tarea de hacer constantes e identificables las formas perceptuales de los objetos externos es de una enorme complicación y hasta ahora ningún computador —por potente que sea— es capaz de simularla ni siquiera de un modo lejano y groseramente aproximado. Muchos animales superiores somos capaces de reconocer ciertos individuos como "el mismo", por distinto que sea el ángulo desde el que lo miremos, la distancia que nos separe de él o la luz que lo ilumine. Esta capacidad de captar formas perceptuales se extiende también a ciertas formas genéricas. Ya antes de saber hablar, el infante capta la misma forma genérica de chupete en los diversos chupetes distintos esparcidos por la casa. Esta capacidad innata para captar formas perceptuales, tanto individuales como genéricas, facilita (y posibilita) el aprendizaje de la lengua, una parte del cual consiste en asociar conceptos lingilísticos con preconceptos perceptuales, es decir, con formas previamente reconñocibles. Desde luego, la adquisición del lenguaje pronto rompe sus ataduras con la experiencia perceptual prelingilística. Los conceptos se precisan, se multiplican, se combinan de modos cada vez más complejos y que en muchos casos ya no tienen nada que ver con la percepción. Pero todos los conceptos del adulto siguen formando una red, algunos de cuyos nudos siguen correspondiendoa . 203

formas perceptuales, Éste es el nivel del lenguaje y éste es el nivel de la historia, el nivel de la verdad y de la falsedad, el nivel de nuestra representación simbólica (pero directa) de la realidad y de los múltiples sistemas que en ella distinguimos. El salto entre la historia y la teoría lo damos en el momento en que decidimos pensar no ya en conceptos, sino en conceptores, y no ya en ideas, sino en teoremas. Y así como el salto entre la mera captación de formas perceptuales y la conceptualización lingúística fue dado por nuestra especie hace muchísimo tiempo, el salto a la teoría es sumamente reciente. Hemos empleado el feo neologismo de conceptor, a falta de término más adecuado. ¿Qué entendemos por conceptor? ¿Y qué entendemos por teorema? Si queremos caracterizar una misma estructura realizada en sistemas distintos, necesitamos de un procedimiento que nos permita describir esa estructura de un modo independiente de los sistemas que la realizan. Ese procedimiento consiste en la introducción de una extensión de nuestro lenguaje mediante el uso-de nociones matemáticas y, en especial, de conceptores. Un conceptor es un testaferro que de algún modo permite pensar a la vez en innumerables conceptos distintos, correspondientes a las historias de innumerables sistemas distintos, pero que, sin embargo, tienen algo en común: una estructura. Y así como combinando conceptos de un modo lingúísticamente adecuado obtenemos proposiciones o ideas, así también combinando conceptores obtendremos teoremas. Me temo que todo esto resulte abstruso y poco claro. Pongamos algunos ejemplos, La geometría euclídea es una teoría (la teoría de la estructura de espacio euclídeo) en la formulación de cuyos teoremas aparecen las palabras punto, recta, ángulo, etc. Como Hilbert no se cansó de subrayar, estas palabras no expresan conceptos normales, no se refieren a nada concreto de ningún sistema particular. En vez de ellas ——nos dice Hilbert— podríamos escribir 4107, mesa y jarra de cerveza, O incluso tatí, tatá y taratatád. Da igual, Esas palabras no están ahí para significar nada particular, son meros testaferros que permiten definir la estructura de espacio euclídeo. Lo único impor204

 tante es que si, en los teoremas de la teoría, sustituimos esos testaferros O conceptores por conceptos sobre un sistema, entonces los teoremas se transforman en ideas, y la teoría se transforma en historia de ese sistema. Si esa historia es verdadera, entonces ese sistema tiene estructura de espacio euclídeo o, equivalentemente, es un modelo o realización de la geometría euclídea. La teoría de grupos es una teoría (la teoría de la estructura de grupo) en cuya formulación aparece una palabra-testaferro que de algún modo representa a cada una de las innumerables operaciones binarias de cada uno de los innumerables sistemas que tienen estructura de grupo, que son grupos. Esa palabra es a veces poro (formulación multiplicativa), a veces más o + (formulación aditiva), a veces otros signos ad hoc, como o, L,*, etc. Da igual, Todas estas palabras-testaferro y signos-testaferro no expresan un concepto, sino un conceptor. Y ese conceptor sirve únicamente para definir una estructura, la estructura de grupo. Si, en los teoremas de la teoría de grupos, sustituimos esos testaferros o conceptores por conceptos sobre un sistema, entonces esos teoremas se convierten en ideas y la teoría da lugar a una historia de ese sistema. Si esa historia es verdadera, entonces ese sistema tiene estructura de grupo, es un grupo o, si se prefiere, es un modelo o realización de la teoría de grupos. Teoría de una estructura La mecánica clásica de partículas es una teoría (la teoría de la estructura mecánica clásica de partículas) en cuya formulación aparecen palabras-testaferro tales como partícula, masa, fuerza, etc. En vez de partícula podríamos decir cuerpo, punto-masa O patatín, y en vez de masa podríamos decir misa o patatán. Da igual, Esas palabras no expresan conceptos, sino conceptores. Y esos conceptores sirven para definir la estructura de mecánica clásica de partículas. Si un sistema es modelo de la teoría mecánica clásica de partículas, si realiza la correspondiente estructura, 205

CONCEPTOS Y TEORÍAS EN LA CIENCIA A AN A ——_—_—_ o 1 INTE entonces podemos sustituir los conceptores por conceptos en los teoremas, obteniendo así ideas verdaderas sobre el sistema en cuestión. En la historia de un sistema sustitulremos el conceptor partícula o patatín por el concepto de 4tamo, en la de otro sistema por el concepto de astro, en la de otro por el de bala o la Tierra, ec. Y lo mismo con los demás conceptores. Así habrá sido posible definir una estructura en abstracto, sin pasar por los innumerables sistemas que la realizan. La teoría de automátas describe la estructura de autómata, estructura que se realiza de una infinidad de modos diferentes en los diversos sistemas que son autómatas (es decir, que cumplen los axiomas de la teoría, que son modelos de la teoría). Cada tinglado real o conceptual describible como un sistema

(ílIAA AAA A A A A A A A A AA A ejemplo, el sistema de la máquina expendedora de cigarrillos anteriormente mencionada es un autómata finito, pero no un autómata lineal. Y hay autómatas que no son ni lineales ni finitos. Todos ellos tienen algo en común: la estructura de autómata, descrita por la teoría (general) de autómatas. Pero cada sistema incorpora diversas estructuras, por eso le son aplicables diversas teorías. La máquina expendedora de cigarrillos que hay en el bar situado junto a mi casa es un autómata finito. Ál menos eso es lo que pienso. Pero es posible que me equivoque. Que esa máquina sea un autómata finito es una hipótesis, una hipótesis histórica. Pero esa hipótesis puede resultar falsa. Observando atentamente el comportamiento de la máquina, registrando su historia en una libreta podría quizá comprobar que estando la máquina en el mismo estado (cargada) y produciéndose la misma entrada (recibiendo una moneda), unas veces responde expendiendo un paquete de cigarrillos y otras se atasca y no expende nada, para gran Irritación del cliente que ha introducido la moneda. En ese caso la entrada y el estado no determinarían univocamente la salida. Por tanto la máquina (en la descripción elegida) no sería un autómata, no sería un sistema que cumpliese los axiomas de la teoría de autómatas, no realizaría la estructura de autómata. La afirmación de que un cierto sistema empírico posee una cierta estructura es siempre una hipótesis histórica, susceptible por tanto de refutación. Por el contrario un teorema de una teoría no es susceptible de refutación. Es un meto instrumento para la descripción de una estructura. Su validez le viene únicamente de su relación lógica con los axiomas de la teoría, que constituyen la definición de la estructura. Toda teoría es matemática Definir una estructura es lo mismo que formular su teoría. Hay que especificar cuáles son los conceptores, qué combinaciones de conceptores son los axiomas y qué lógica determina la relación de 207

 consecuencia entre axiomas y teoremas. Con esto queda unívocamente determinada la estructura y su teoría. Todo esto es independiente de la realidad empírica del mundo, todo esto es mera matemática. En efecto, la matemática suele definirse como la ciencia de las estructuras. En este sentido, todas las teorías son matemáticas. Naturalmente la mayoría de las estructuras definibles carecen de todo interés para el científico, pues no parecen realizarse en los sistemas reales con los que se topa. Lo que en último término nos interesa no son las estructuras estudiadas por la matemática, sino los sistemas reales del mundo que nos rodea, estudiados por la historia. Pero la mayoría de las estructuras definibles son irrelevantes para la historia de esos sistemas. Por eso los físicos, economistas, etc., no desarrollan teorías cualesquiera, sino precisamente las teorías de las estructuras que ellos creen ver realizadas en los sistemas físicos, económicos, etc., con los que se enfrentan. Pero una cosa es que ellos crean que esos sistemas son modelos de aquellas teorías y otra es que realmente lo sean. Si descubren que no lo son, pierden todo interés por la correspondiente estructura y cambian de teoría, modificando la anterior en el sentido que más les parezca ofrecer esperanzas de ser realizada en el sistema estudiado. Con ello la teoría no ha quedado refutada, sino sólo arrinconada., Lo que nos interesa es, en primer lugar, el abigarrado y jugoso mundo perceptual que nos rodea, y en segundo lugar, el mundo que simbólicamente captamos con nuestro lenguaje y con nuestros conceptos, en resumen, la historia. La teoría es un mero instrumento para iluminar la historia. Pero la historia siempre es hipotética e insegura. Sólo los fríos y vacíos teoremas de la teoría son seguros, pues no dicen nada acerca del mundo. Podemos estar seguros de que en un sistema económico que tenga estructura de mercado libre los precios siempre se formarán de acuerdo con las leyes de la teoría microeconómica de la formación de precios. Pero nunca podemos estar seguros de que el sistema económico que tenemos delante tenga tal estructura. La teoría microeconómica de la formación de precios es una teoría matemática, la mera descripción de una estructura, sobre cuya real incardinación en el 208

HISTORIA Y TEORÍA ABSTRACTA a 1 A A

CAPÍTULO 9 TEORÍAS Y MODELOS La actividad científica culmina en la construcción y contrastación de teorías de gran alcance y poder explicativo y predictivo. ¿Qué son las teorías? Las teorías científicas son algo muy complejo que, al menos en parte, está en los cerebros de los científicos, pero la plasmación concreta de las teorías en su insondable complicación neural sobrepasa nuestra capacidad cognitiva. Si queremos caracterizarlas, tenemos que limitarnos a precisar más o menos formalmente algunos de sus rasgos característicos, dejando otros muchos en la penumbra. Las teorías se pueden caracterizar y de hecho se han caracterizado de diversas maneras, por ejemplo, sintácticamente, semánticamente y pragmáticamente. El enfoque sintáctico de las teorías nos permite la definición más escueta y precisa de sus propiedades. Es el enfoque más clásico y extendido en la filosofía de la ciencia, el que mejor encaja con la tradición de la metamatemática. Presente ya en los padres fundadores (como Bilbert, Tarski, Carnap o Popper), continúa en la base de la mayoría de los trabajos actuales. Este enfoque concibe una teoría como un conjunto de teoremas clausurado respecto a la relación de consecuencia. El enfoque semántico de las teorías (al que nos referiremos con más extensión en el capítulo 11) fue iniciado por Beth y Suppes. Arroja luz sobre las aplicaciones de las teorías y permite describir211

las de un modo más compacto e interrelacionado, usando para ello el lenguaje de la teoría informal de conjuntos, más flexible e intuitivo que el de la lógica formal de primer orden. Este enfoque concibe una teoría como un conjunto de realizaciones o modelos (los sisternas que cumplen las exigencias de la teoría). El enfoque pragmático de las teorías fue iniciado por Kolmogoroy y Solomonov. Arroja luz sobre la función de las teorías como compresores de la información. Así, por ejemplo, las leyes de Kepler serían un procedimiento para comprimir la información dispersa en los múltiples datos sobre los movimientos planetarios. Este enfoque concibe una teoría como un programa computacional, Estos tres enfoques son compatibles entre sí y complementarios, La misma teoría puede considerarse alternativamente (y con provecho) desde los tres puntos de vista. De hecho, una teoría en sentido sintáctico determina la clase de sus modelos y puede cumplir una misión computacional de compresión de la información. Una clase de modelos determina el conjunto de las fórmulas (de cierto lenguaje formal) satisfechas en todos ellos, que puede considerarse como una teoría en sentido sintáctico. Y con frecuencia un programa de cormpresión de la información determina también sus correspondientes versiones teóricas sintáctica y semántica. En definitiva, los sectarios de los diversos enfoques no están hablando de cosas distintas, sino de aspectos distintos de las mismas cosas (las teorías científicas). Las teorías mejor definidas son las teorías matemáticas y el enfoque más desarrollado para su estudio es el metamatemático, que combina su consideración como teorías en sentido sintáctico con el estudio preciso de las relaciones semánticas con sus modelos (teoría de modelos). Es el enfoque que adoptamos en este capítulo. SIStemas El mundo no está dividido, estructurado o articulado de por sí de un modo unívoco. Somos nosotros los que lo dividimos, estructuramos y articulamos, proyectando sobre las diversas zonas de la 212

TEORÍAS Y MODELOS A A A ¿yq x_—_ o —_— _— A e 1 A A A KA K_——_—___ oe e AA AKÁ < _ _ Q = _z > _ 5 Í_ 3 Í E II A A realidad nuestros esquemas conceptuales y teóricos, y observando hasta qué punto esas zonas de la realidad encajan en los esquemas que sobre ellas proyectamos o hasta qué punto los rechazan. Nuestra atención no suele dirigirse a la totalidad del universo considerado desde todos los puntos de vista, sino a ciertas zonas del universo consideradas desde algunos puntos de vista determinados. Esta noción un tanto vaga de zona de realidad (o del mundo o del universo) a la que dirigimos nuestra atención desde ciertos puntos de vista se precisa mediante la noción de sistema. Un sistema es una parcela de la realidad (en un sentido muy amplio de 'realidad", que incluye los objetos de nuestro pensamiento) explícitamente delimitada y "enfocada. Especificar de qué sistema estamos hablando significa indicar el ámbito de la realidad al que nos referimos (el universo o dominio del sistema) y los objetos, propiedades, relaciones y funciones de ese ámbito en los que nos vamos a fijar, que queremos "enfocar" o distinguir. Si cambiamos de ámbito, cambiamos de sistema. Si en vez de considerar los números naturales consideramos los reales, cambiamos de sistema. Si en vez de referirnos a los satélites de Júpiter, nos referimos a los de Saturno, cambiamos de sistema. Si en vez de estudiar la población de pingilinos de la Antártida estudiamos la población humana de Australia, cambiamos de sistema. Pero también podemos cambiar de sistema permaneciendo en el mismo ámbito, reftriéndonos a las mismas cosas, simplemente considerándolas desde un punto de vista distinto, enfocándolas de diverso modo, fijándonos más en ciertos individuos que en otros, en ciertas relaciones que en otras. Así, aun hablando siempre de los números reales (R), podemos distinguir o enfocar el 0, el 1 o el número Tt, podemos fijarnos en la relación 'menor o igual que' (

... CONCEPTOS Y TEORÍAS EN LA CIENCIA a mas distintos que tengan como universo el conjunto de los astros de nuestro «sistema solar», según que nos fijemos sólo en sus trayectorias, por ejemplo, o que consideremos también sus masas, sus interacciones gravitatorias, su composición química, sus campos magnéticos, etc. Un sistema puede ser homogéneo * (si cuenta con un solo universo, ámbito o dominio de individuos) o heterogéneo (si cuenta con varios). Puesto que cada sistema heterogéneo es también descriptible (de otra manera, claro) como sistema homogéneo, vamos a entender en lo que sigue por sistema siempre sistema homogéneo, a fin de simplificar la exposición ?. Un sistema es una entidad compleja, compuesta de un conjunto no vacío, llamado el universo del sistema, y de una serie de individuos, relaciones y funciones (sobre ese universo) distinguidos o considerados. Si A es el universo del sistema, quizá queramos fijarnos especialmente en ciertos individuos concretos 4,...a, de 4. Estos serán los individuos distinguidos del sistema. Cualquier subconjunto de Á es una propiedad o relación monaria en A. Cualquier subconjunto de ÁA X A, es decir, de A?, es una relación binaria en A. En general, cualquier subconjunto de A XA X ... XA, es ' Aquí usamos la palabra «homogéneo» en su sentido ordinario, que no tiene nada que ver con los modelos homogéneos de que se suele hablar en el contexto del estudio de los modelos no isomorfos de una teoría completa. * A fin de simplificar aún más el tema, en el resto de este capítulo nos limitaremos a considerar sistemas matemáticos, que son los menos problemáticos y, dentro de los sisremas matemáticos, sólo los sistemas con número finito de individuos distinguidos (que, por otro lado, son los únicos que se estudian en las matemáticas habituales). La aplicación de estas nociones a los sistemas físicos y, en general, a la realidad extramatemática es abordada en los tres capítulos siguientes. Por otro lado, si el lector carece de suficientes conocimientos de teoría de conjuntos como para seguir sin dificultad lo aquí expuesto, puede consultar j. Mosterín: Teoría axtomática de conjuntos (Ariel, 2.3 ed., Barcelona, 1979). Si al lector le sabe a poco la escuálida información sobre teorías y modelos aquí ofrecida, puede ampliarla leyendo, por ejemplo: A. Tarski, A. Mostowski y R. Robinson: Undecidable Theories (North-Holland, Amsterdam, 1953), y consultando €. Chang y H.]. Keisler: Model Theory (Norrh-Holland, 3.* ed., Amsterdam, 1990). En esta

última obra encontrará también tratados los sistemas matemáticos con un número infinito de individuos distinguidos (de utilidad en teoría avanzada de modelos), además de una amplia bibliografía.
214

TEORÍAS Y MODELOS a A a A a e AAA A Y A A o e A o A e 1 A A A q ————Á decir, de A", es decir, cualquier conjunto de r-tuplos de elementos de A, es una relación r-aria en A, Pero no tenemos por qué fijarnos en esa infinidad de relaciones. Sólo aquellas relaciones R,...R, en que nos fijemos especialmente serán relaciones distinguidas del sistema. Y lo mismo ocurre con las funciones. Cualquier aplicación de Aen 4es una función en 4, pero una tal función fsólo será una función distinguida del sistema si la enfocamos explícitamente al definirlo. El sistema es la secuencia formada por el universo 4, las . relaciones distinguidas R ...R, las funciones distinguidas f....f. y los individuos distinguidos a4,...4, Recuérdese que en especial puede no haber ninguna relación distinguida o ninguna función distiguida o ningún individuo distinguido. kÁ es un sistema sí y solo sihay AR ...R, fo. £,4...a (0% 1 mm, n, €, N), tales que A OA A A) AFD i (3) RC 4" (paral < ¿< ny para algún número natural positivo 7, que depende de 7) (4) £4'>Alparal < ¡ < my para algún número natural positivo 5, que depende de y) (5) 4 € Á(paral < 1< /) Si la relación distinguida R,C 4", entonces decimos que KR, es una relación aria y que 7 es su número ario o aridad. Si la función f,es una aplicación de Á*en Á, entonces decimos que /es una función s-aria. y ses su número ario o aridad. En lo sucesivo utilizaremos las letras inglesas mayúsculas para referirnos indistintamente a sistemas cualesquiera. Tipos de similaridad Un sistema puede tener dos relaciones distinguidas y otro puede tener tres, o ninguna. En ese caso, decimos que ambos sistemas 215

similaridad distintos. Un sístema que contenga dos relaciones distinguidas (una monaria y otra binaria) es también disimilar respecto a otro que contenga igualmente dos relaciones distinguidas, pero ambas binarias. Lo mismo ocurre con las funciones. Si un sistema 4 posee más (o menos) funciones que otro sistema 2, ambos sistemas son disimilares, pertenecen a tipos de similaridad distintos. Si Ly % poseen el mismo número de funciones, pero su aridad no coincide, L y % son disimilares. Y si Sé posee más (o menos) individuos distiguidos que 2, 4 y 9 pertenecen a tipos de similaridad distintos. Dos sistemas 4 y % son similares, o pertenecen al mismo tipo de similaridad, si ocurre que sí y 9 coinciden tanto en el núme-ro como en la aridad de sus relaciones y funciones distinguidas, así como en el número de sus individuos distinguidos. Por ejemplo ¿N, +, 07 y A) y Les el número de individuos distinguidos de A, Isomorfía Diversos sistemas pueden parecerse estructuralmente en ciertos aspectos, pero no en otros, pueden compartir unas estructuras, pero no otras. En el caso extremo, pueden ser estructuralmente 3 Enrique Casanovas me hizo observar que esta definición estándar del tipo de similaridad presenta cierta dificultad en algunos casos límite. Ási, si tomamos el conjunto vacio 2 como relación de un sistema, la relación (Ú no tendrá una aridad univoca, sino cualquier aridad. Por otro lado, si 10, <0, 0>] está incluido en el universo Á del sistema, y luego tenemos la relación (<0, 0>j, esta relación será a la vez monaria y binaria, ya que (<0, 0>) está incluida tanto en Á como en 4*. La dificultad es superable a base de complicar algo más la definición, pero aquí renunciamos a hacerlo. El lector puede intentarlo por su cuenta. 216

A A e idénticos. En ese caso decimos que se trata de sistemas isomorfos. Son distinguibles por su «materia», por su universo, pero no por su forma: su forma es la misma, son isomorfos. Sean 4 y % dos sistemas del mismo tipo de similaridad. Sea sé = AR ANS ADO SS AS De 0 e ges un ¿somorfismo entre Ly % si y solo si (1) gesuna aplicación biyectiva de Aen B (2) gla) = bparal <1 (3) para todo A E Eco .x)) = h, (g0)...g ()), para 1 << My donde res el número arlo de Dn (4) para todo X...., x,€ A: (Xx) E Rsi y solo si

- CONCEPTOS. Y TEORÍAS EN LA CIENCIA compartir una misma estructura, por ejempl la estructura de grupo, o de espacio vectorial, o de átomo de helio, o de mercado líbre, o de equipo de fútbol. Una estructura es algo que tienen en común varios sistemas distintos que no sólo son similares (pertenecientes al mismo tipo de similaridad), sino que además se parecen respecto a algún aspecto de su organización interna. Precisamente la matemática es la ciencia de las estructuras. No se interesa tanto por los sistemas concretos en que esas estructuras se realizan como por las estructuras mismas. Una estructura es algo que tienen en común varios sistemas, una forma que comparten varios sistemas. Por tanto, una estructura puede considerarse como algo intensional. Sin embargo, también es posible considerar la estructura extensionalmente, como la clase de todos los sistemas que la realizan o incorporan. Así, la estructura de grupo puede identificarse (intensionalmente) con aquello que tienen de común todos los grupos o (extensionalmente) con la clase de todos los grupos. Como el enfoque extensional es el más sencillo, lo adoptaremos aquí, como es usual en la lógica. Consideraremos una estructura? como una cierta clase de sistemas. Una estructura es una clase de sistemas similares entre sí que comparten algo más que el mero hecho de ser similares. ¿Cómo describir con precisión ese «algo más» que comparten? Es difícil nablar de esas entidades abstractas y complejas que son las estructuras utilizando el lenguaje cotidiano. Para hablar de ellas con pre* En la bibliografía matemática es frecuente encontrar un uso ambiguo de la palabra estructura, Unas veces estructura significa lo que aquí llamamos sistema, por ejemplo un grupo concreto. Otras veces estructura significa lo que aquí llamamos estructura, por ejemplo, la estructura de grupo. Algunos autores tratan de distinguir ambos significados, hablando de estructura concreta en el primer caso y de estructura abstracta en el segundo. Otros (como Bourbaki) hablan de estructura en el primer caso y de especie de estructuras en el segundo, Nosotros usamos en el primer caso la palabra sistema y reservamos la palabra estructura para el segundo caso (el de estructura abstracta o especie de estructuras). Con esto nos apartamos del uso más extendido en la lógica matemática (que consiste en llamar estrictura a lo que aquí llamamos sistera) en aras de una mayor claridad conceptual. Y no somos los únicos en

adoptar esta solución. Véase, por ejemplo, la voz Structures en el Encyclopedic Dictronary of Mathematics, vol. 2, pp. 1237 y ss., Massachusetts Institute of "Technology Press, 1980, 218

rn .... IEORÍAS Y MODELOS A e e ld cisión es menester servirse de un lenguaje 4d hoc, de un lenguaje formal hecho a la medida de un cierto tipo de similaridad (el tipo de similaridad al que pertenecen todos los sistemas que realizan dicha estructura). Los sistemas de ese tipo de similaridad son las entidades de las que tiene sentido preguntarse si tienen o no una estructura. Aplicada a otras entidades, la pregunta carecería de sentido. | Lenguajes formales Un lenguaje formal es un instrumento, un tinglado convencional que inventamos y construimos para poder describir más fácilmente las estructuras, permitiéndonos hablar simultáneamente de todos los sistemas de un mismo tipo de similaridad. Su utilidad es restringida: sólo nos sirve para hablar de los sistemas de ese tipo de similaridad. Pero, dentro de esa limitación, nos permite describir las estructuras que esos sistemas tienen (o no tienen) con mucha mayor claridad y precisión que el lenguaje ordinario. Un lenguaje formal consta de una serie de signos, que constituyen su alfabeto, un conjunto de términos y un conjunto de fórmulas, que son ciertas combinaciones o secuencias de signes del alfabeto. Sea £ un lenguaje del tipo de similaridad T = <7... 7.55... s 5 1). Entonces el alfabeto de £ consta de los siguientes signos: (1) un conjunto denumerable de variables: x,, x,, ás (2) nrelatores: P,... P.. Cada uno de los relatores tiene una aridad determinada, que depende del tipo 7. Así, P, tiene la aridad 7, (para l < 1% 2) (3) mfunctores: g,... g. . Cada uno de los functores tiene también su aridad. Así, y; tiene la aridad s, (paral < 1 < mn) (4) [constantes individuales: e, ... €, (5) 5 conectores: DD, A, V >, > (6) 2 cuantificadores: Y, 3 (7) el signo de identidad: = 219

Los variables, los conectores, los cuantificadores y el signo de identidad son comunes a todos los lenguajes formales de primer orden con identidad, que son aquellos que aquí consideramos, mientras no Iindiquemos explícitamente lo contrario. Los relatores, los functores y las constantes individuales son los signos peculiares de cada lenguaje formal, del que constituyen su alfabeto propio o peculiar. Los conectores, los cuantificadores y el signo de identidad tienen un significado fijo. Los relatores, los functores y las constantes individuales carecen de significado propio, pero adquieren significados distintos según el sistema sobre el que los interpretamos. No son conceptos, sino conceptores, matrices conceptuales que sólo se convierten en conceptos y adquieren significado al ser proyectados o interpretados sobre la correspondiente entidad distinguida de un sistema determinado. Á partir de los signos del alfabeto de un lenguaje formal .£ podemos definir los térmiros de ¿£ como todas y solas las filas de signos que se pueden formar mediante las siguientes reglas: 1) Cualquier variable individual es un término de £, 2) Cualquier constante individual de Les un término de £. 3) Si fes un functor sario y T,... T son términos de £, entonces fT,... Tes un término de £. A partir de los signos del alfabeto de Ly de los términos de £ podemos definir las fórmulas de £ como todas y solas las filas de signos que se pueden formar mediante las siguientes reglas: I) Si Pes un relator rario de «£ y T,... T_son términos de «£, entonces PT... T, es una fórmula d . 2) Si T, y T, son términos de «£, entonces T, = 7, es una fórmula de £, 3) Si (es una fórmula de £, entonces (Y es una fórmula de A 4) Si (Wes una fórmula de .£ y PB es una fórmula de £, entonces [% A BP), (a v B), (a = > P) y (a = PB) son fórmulas de£: 220

TEORÍAS Y MODELOS 5) Si 0% es una fórmula de £ y x es una variable individual, entonces Vx Q y 3x 0 son fórmulas de £. Las variables individuales que forman parte de una fórmula pueden estar ligadas o libres, según que caigan o no bajo el alcance de un cuantificador. Una fórmula con variables libres se llama una fórmula abierta. Una fórmula sin variables libres se llama una fórmula cerrada o sentencia. Verdad y satisfacción Un lenguaje formal y un sistema se llaman homólogos cuando ambos poseen el mismo tipo de similaridad. Podemos emplear un lenguaje formal para hablar de un sistema homólogo determinado. En ese caso decimos que estamos interpretando ese lenguaje formal como si fuera un lenguaje que se refiriese precisamente a ese sistema o, lo que es lo mismo, que estamos considerando ese sistema como una interpretación de ese lenguaje formal. Eso lo obtenemos haciendo que las varibles individuales se refieran indistintamente a individuos cualesquiera del universo del sistema, que cada relator denote una relación distinguida de ese sistema, que cada functor denote una función distinguida de ese sistema y que cada constante individual denote un individuo distinguido del sistema. De este modo cada término del lenguaje formal se refiere a un individuo del universo del sistema y cada sentencia del lenguaje formal « es una afirmación verdadera o falsa acerca de ese sistema. La noción de verdad de una sentencia de un lenguaje formal en un sistema fue precisada por A. Tarski en 1935, valiéndose para ello de otra noción aún más general, la de satisfacción de una fórmula en un sistema (respecto a una cierta asignación). En efecto, la única manera de definir la verdad de una sentencia compleja es recursivamente, en función de la verdad de sus componentes. Pero algunos de sus componentes pueden ser fórmulas . abiertas. Por tanto, es necesario usar una noción —-la de satisfac22l

... CONCEPTOS Y TEORÍAS EN LA CIENCIA A A ción— que se aplique a todo tipo de fórmulas, tanto abiertas como cerradas. Sea LAR ooo Ri fo fo a... 4,7 un sistema de tipo de simiiaridad O. Sea L un lenguaje formal homólogo, es decir, del mismo tipo de similaridad, cuyo alfabeto peculiar está compuesto por Pi. Pg... g,, €... €, Una interpretación de Len sé es una aplicación del conjunto de las variables individuales de Len A y de los relatores, functores y constantes individuales de Len las correspondientes relaciones, funciones e individuos distinguidos de 4. Dado un término de £ y una interpretación de Len Á, ese término denota en esa interpretación un cierto individuo de %. Llamemos $ a la interpretación. Para cualquier variable x, $ (x) es el elemento de 4 que la aplicación $ asigna a la variable x. Para la constante individual c, 4 (c.) = a. Y para cada término compuesto de (O ED) Sea $ £ la interpretación de Len sé que coincide en todo con S excepto en que asigna a la variable xel individuo 4€ 4. Con esto estamos en posición de definir recursivamente la satisfacción de cualquier fórmula por la interpretación $ sobre 4. En vez de decir «la interpretación $ sobre 4 satisface la fórmula O» escribiremos abreviadamente «$ sat O. Definimos: A sat PT... 7 si y solo si CG AT)... F(T) > ER $ sat T, = T, si y solo si P(7,) = P(T) Í sat ““Qsi y solo si $ no sat 0 ¿Ísaclo a B) si y solo si $ sat Ay Y sat B ¿sala v PB si y solo si Psar Oo P sat B $ sar [o = > B) si y solo si: si $ sat Y, entonces $ sat fl $4 sar (oa S B) si y solo si: $ sar Or si y sólo si P sar B SF sar Vx0 sí y solo si para cada as A: Pé sat O $ sar 3x0 si y solo sí para algún 4€ A: $sat O Con esto queda univocamente determinado para cada fórmula p y cada interpretación $ en Aé si $ satisface po no. La sarisfacción de una fórmula abierta por una interpretación sobre KL 242

_.... FEORÍAS Y MODELOS ¡q A A depende tanto del sistema 4 como de la particular asignación de individuos de Aa las variables de $ característica de esa interpretación. Pero la satisfacción de una fórmula cerrada o sentencia por una interpretación $ sobre un sistema SL depende exclusivamente del sistema Á y es invariante respecto a las diversas asignaciones de individuos a las variables, Por tanto, si alguna interpretación sobre Y satisface una sentencia (, entonces toda interpretación sobre Y satisface también la sentencia p. Por eso podemos decir simplemente que el sistema Y satisface p. Con lo cual llegamos a la definición tarskiana de verdad: Una sentencia Q es verdadera en un sistema SÍ sí y sólo sí Y satisface €. Consecuencia e independencia Sea Y una sentencia de un lenguaje formal .«£ de un cierto tipo de similaridad O, Entonces está determinado, como acabamos de ver, en qué sistemas de ese mismo tipo de similaridad Q resulta verdadera y en qué otros sistemas (resulta falsa, es decir, qué sistemas satisfacen Q y qué sistemas no la satisfacen. Si todos los sistemas homólogos con £ satisfacen , o, lo que es lo mismo, si Y es verdadera en todos los sistemas homólogos con (, entonces decimos que es una sentencia lógicamente válida. Sí al menos un sistema homólogo de «£ satisface Q, o, lo que es lo mismo, si Y es verdadera en algún sistema, entonces decimos que Y es satisfacible. Si ningún sistema homólogo de .£ satisface fp, o, lo que es lo mismo, si Y no es verdadera en ningún sistema, entonces decimos que Q es imsatisfaciole. Dado un conjunto P" de sentencias de ¿£, decimos que un sistema SÍ satisface 1' sí y solo si Y satisface cada una de las sentencias de T". Dado un conjunto Í' de sentencias de «£ y dada una sentencia Y de £, decimos que P' implica Q, o, lo que es lo mismo, que Y es una consecuencia de Í, si y sólo si todo sistema que satisface P' satisface también 0, o, si se prefiere, si p es verdadera en cada sistema en que todas las sentencias de Í' son verdaderas. En especial, 223

a A .. CONCEPTOS Y TEORÍAS EN LA CIENCIA una sentencia Q implica otra sentencia Yo, lo que es lo mismo, Y es una consecuencia de , si y sólo si todo sistema que satisface Y satisface también Yo, si se prefiere, si Y es verdadera en todos los sistemas en los que Y es verdadera. Si la sentencia p de £ es una consecuencia del conjunto I" de sentencias de «£, escribimos como abreviatura: T' E $. Si la sentencla Y es una consecuencia de Y (o si P implica Y) escribimos como abreviatura: PE Y. Una sentencia Y es ¿mdependiente de otra sentencia del mismo lenguaje sí y sólo si Y no es una consecuencia de . Del mismo modo, una sentencia es independiente de un conjunto I' de sentencias del mismo lenguaje si y sólo sí (no es una consecuencia de IP, es decir, si Hp. | Consideremos el conjunto vacío £4 de sentencias de .£. ¿Qué consecuencias tiene? Tiene como consecuencias (o implica) todas y solas las sentencias lógicamente válidas de .£. En efecto, si un sistema cualquiera Á no satisface un conjunto Í' de sentencias, entonces hay alguna sentencia W € T' tal que L no satisface Y. En especial, si + no satisface (0, entonces hay alguna sentencia Y € (4, tal que Y no satisface Y. Pero no hay ninguna sentencia en (Í, ya que (Ó es el conjunto vacío. Por tanto, para cualquier sistema sé, Á satisface (J. De ahí se sigue que las consecuencias de (Y serán las sentencias satisfechas por todos los sistemas, es decir, las sentencias lógicamente válidas. En vez de (D E Y suele escribirse abreviadamente |= Y. Las siguientes expresiones significan lo mismo: EY HEY Y es una consecuencia del conjunto vacío de sentencias Y es satisfecha por todos los sistemas Y es verdad en todos los sistemas yes lógicamente válida Por otro lado, fácil es de advertir que para cualesquiera conjuntos de sentencias T' y Á del mismo lenguaje «£ y para cada sentencia p de L ocurre: 224

_. TEORÍAS Y MODELOS FU A A SPEAyI Rp entonces Á E y Como el conjunto vacío está incluido en cualquier conjunto, de ahí se sigue que para cada conjunto I' de sentencias de «Py cada sentencia Y de £, si SÓ E Y, entonces T' + = Y, es decir, cualquier sentencia lógicamente válida es una consecuencia de cualquier conjunto. | Consideremos ahora una contradicción, es decir, la conjunción de dos sentencias una de las cuales es la negación de la otra: (p A 0). Un sistema Y satisface “10 si y sólo si sé no satisface Y. Por tanto, es imposible que . satisfaga a la vez P y 70. (9 A 0) es insatisfacible, Una sentencia imsatisfacible yw no es satisfecha por ningún sistema. Por consiguiente, no hay ningún sistema que satisfaga Y y no satisfaga cualquier otra sentencia 0%. Todo sistema que satisfaga una sentencia insatisfacible Y satisfará también cualquier otra sentencia O. Para cualquier sentencia (Q, (Y es una consecuencia de Y. Las siguientes expresiones significan lo mismo: EY Y es insatisfacible W implica una contradicción ningún sistema satisface y para cada sentencia Ade L: yw Ea Teorías Una teoría es un conjunto de fórmulas cerradas o sentencias, pero no todo conjunto de sentencias es una teoría. Para ser una teoría, es preciso que el conjunto de sentencias esté clausurado respecto a la relación de consecuencia, es decir, que las consecuencias de los elementos del conjunto sean también elementos del conjunto. Llamemos Sent £ al conjunto de todas las sentencias del lenguaje £, Sea T' un conjunto de sentencias de £, es decir, sea DT”. Sent

- CONCEPTOS Y TEORÍAS EN LA CIENCIA Tes una teoría sí y solo si para toda y € Sent £: si TE Q, entonces P € Í. Por tanto, sí Tes una teoría, entonces [Y € Sent Li YT E Q) = Si el conjunto I" de sentencias de Les una teoría, decimos que £L es el lenguaje de la teoría y llamamos teoremas de la teoría a los elementos de I". La mínima teoría formulable en el lenguaje Les el conjunto de todas las sentencias lógicamente válidas de «£. En efecto, (0 € Sent L | =p) es una teoría, pues es un conjunto de sentencias clausurado respecto a la relación de consecuencia, ya que las consecuencias de sentencias lógicamente válidas son a su vez sentencias lógicamente válidas. Y por otro lado, toda teoría contiene [p e Sent £ | = Q(), ya que todas las sentencias lógicamente válidas son consecuencias de cualquier conjunto de sentencias y, en especial, de cualquuer teoría. En resumen, (WTI Tes una teoría en L) = (pe Sent L| |= de 471 Tes una teoría en L7. La máxima teoría formulable en el lenguaje Les el conjunto de todas las sentencias de £, Sent £. En efecto, Sent .£ es una teoría, pues es un conjunto de sentencias clausurado respecto a la relación de consecuencia, ya que las consecuencias de sentencias de «Lson a su vez sentencias de «£. Y por otro lado, toda teoría en Z está contenida en Sent £, ya que toda teoría de L es un conjunto de sentencias de £. En resumen, UY TI Tes una teoría en £) = Sent Le [Ti Tes una teoría en £?. Por tanto, para cualquier teoría Ten L, [pe Sent £1 E py E TC Sent L. La teoría máxima en £, es decir, Sent «£, el conjunto de todas las sentencias de .£, se llama también la teoría imconsistente en £. 226

 Cualquier otra teoría en ¿£ que no abarque todas las sentencias de £ se llama una teoría consistente en «£. Otra manera de expresar lo mismo es decir que una teoría es inconsistente si contiene contradicciones, es decir, si entre sus teoremas se encuentra una sentencia del tipo (PA “1p); y que es consistente si carece de contradicciones. Una teoría inconsistente es claramente insatisfacible. En efecto, si 7 es inconsistente, 7 contiene algún teorema del tipo (pA 0), y ya vimos que una sentencia así no puede ser verdadera en ningún sistema. Por tanto, ningún sistema satisfará tal teoría, que será insatisfacible. Por otro lado, y aunque no se vea a primera vista, se puede demostrar que toda teoría consistente es satisfacible, es decir, que todos sus teoremas resultan verdaderos en algún sistema. Sea Tuna teoría en un lenguaje ¿£. Las siguientes expresiones significan lo mismo: T= Sent £ para algún pe Sent L. (par) e T Tes inconsistente Tes contradictoria Tes insatistacible Modelos Las sentencias que constituyen una teoría 7'pueden ser interpretadas sobre un sistema homólogo cualquiera +4. Con ello se convierten en proposiciones o afirmaciones acerca de L, afirmaciones que pueden ser verdaderas o falsas. Si todas son verdaderas, decimos que sÍ es un modelo o realización de 7. Resumiendo: Á es un modelo de T'si y solo si para cada PE T: K sat Q. La teoría T'es un conjunto de sentencias de un lenguaje formal ¿£. Los sistemas homólogos con

coma CONCEPTOS Y TEORÍAS EN LA CIENCIA 222 o A e Y teoría puede hablar, las entidades a las que la teoría puede ser aplicada (con éxito o sin él, pero con sentido). Solo de esos sistemas tiene sentido preguntarse sí son o no modelos de la teoría. Y la respuesta sólo será afirmativa en los casos de aplicación exitosa, en los sistemas que cumplen cuanto la teoría (interpretada sobre ellos) dice. Sea Tuna teoría y sea sÍ un sistema homólogo con su lenguaje. Las siguientes expresiones significan lo mismo: SÁ sat T | sá es un modelo de 7 4 es una realización de 7 para cada PE T %sat Y para cada P € T: Y es verdadera en Á T'se cumple en sé Una estructura, extensionalmente considerada, puede considerarse como una clase de sistemas similares que tienen algo más en común que un tipo de similaridad. Eso de más que tienen en común los sistemas que poseen la misma estructura es el ser modelos de una misma teoría. Por ello, la teoría puede considerarse como la definición de la estructura. Dada una teoría 7, una cierta estructura queda univocamente caracterizada por 7 a saber, la estructura común a todos los modelos de 7 o, si se prefiere, la clase de todos los modelos de T a la que llamaremos Mod (1). Definimos: MAD) =141| sat Th Toda teoría caracteriza una estructura. ¿Vale también la inversa? ¿Es toda estructura caracterizable por una teoría? Si por teoría entendemos teoría de primer orden, la respuesta es no. No toda estructura es caracterizable por una teoría de primer orden. Lo que tienen de estructuralmente común ciertos sistemas no siempre es expresable en un lenguaje formal de primer orden. Cuando una 228

TEORÍAS Y MODELOS MA A A a A a a A A A A estructura es caracterizable por una teoría de primer orden, decimos que se trata de una estructura elemental, Sea E una clase de sistemas. Definimos: Ees una estructura elemental sí y sólo si hay una teoría (de primer orden) Ftal que E= Mod (D. Dicho con otras palabras, £ es una estructura elemental si y sólo si hay una teoría T' tal que para cada sistema Á: Le Esi y sólo si L sat T. El sistema estándar de los números naturales. es el sistema A = (N, 0, 5, +, -», donde ÑN es el conjunto de los números naturales y las entidades distinguidas son el cero y las funciones del siguiente, la adición y la multiplicación. Este sistema comparte con los sistemas isomorfos con él una estructura: la estructura numérica natural. Pues bien, esta estructura no es elemental, no es caracterizable por ninguna teoría de primer orden. Tampoco la estructura numérica real o la estructura de espacio euclídeo o la estructura de espacio topológico son elementales. | Todo sistema L determina una teoría (la teoría de L), a saber, el conjunto de todas las sentencias (del lenguaje homólogo con £) que resultan verdaderas en sé. Á esta teoría la llamamos abreviadamente 7H459%). Definimos: IHS3D =f0! Ásat Q). TH 54) es una teoría, En efecto, es un conjunto de sentencias y, además, está clausurada respecto a consecuencia, ya que cualquier consecuencia de sentencias verdaderas en sé es también verdadera en Y. Hemos visto que cada teoría T caracteriza una cierta estructura Mod 1). ¿Qué estructura caracteriza Th(s6)? La estructura formada por todos los sistemas elementalmente equivalentes a 4, 229

CONCEPTOS Y TEORÍAS EN LA CIENCIA Equivalencia elemental Sean dl y B dos sistemas similares y sea L el correspondiente lenguaje formal homólogo. Puede ocurrir que £ sirva para diferenciar Y de % en el sentido de que Z satisfaga alguna sentencia de L que B no satisface. En ese caso decimos que 4 y % no son elementalmente equivalentes. Pero puede ocurrir también que XL y GB, aun siendo dos sistemas distintos, satisfagan exactamente las mismas sentencias de «£. En este caso decimos que 4 y % son elementalmente equivalentes. La diferencia entre ellas no es expresable en el lenguaje formal £. Todo lo expresable en £ que es verdad en SÁ es también verdad en 4. Y todo lo expresable en £ que es falso en Á es también falso en %, Hemos visto que la teoría del sistema sé, TH 4), es el conjunto de todas las sentencias de .£ verdaderas en sé. Pero si % es elementalmente equivalente a 2, entonces todas las sentencias verdaderas en Y son también verdaderas en %. Por tanto, la teoría de % será el mismo conjunto de sentencias que la teoría de sé, es decir, IKAÁ) = THB). Para expresar que los sistemas sé y % son elementalmente equivalentes, escribimos abreviadamente sé = = 9, Sean Á y % sistemas del mismo tipo de similaridad y sea «£ un lenguaje homólogo. Las siguientes expresiones significan lo mismo: aá= 2 A y B son elementalmente equivalentes Para cada sentencia Q de L: 4 sat Q si y sólo si B sat p TK) = THB) La relación de equivalencia elemental entre sistemas es reflexiva, simétrica y transitiva. Se trata, pues, de una relación de equivalencia. También la isomorfía es una relación de equivalencias entre sistemas, e incluso es más fina y exigente que la equivalencia elemental. En efecto, para cualesquiera sistemas Ly %, si 4 y % son isomorfos, entonces (a fortiorz, por así decir) 4 y 9% son elemen230

 equivalentes. Pero la invesa no vale en general, sino sólo en el caso de sistemas finitos. Recordemos que la isomorfía se expresa por el signo =. En resumen, para cualesquiera sistemas similares Ly %: S $ = %, entonces Y = %, Si 4 es finito y Y = %, entonces Á = 9%, Dos sistemas isomorfos son estructuralmente idénticos. Dos sistemas elementalmente equivalentes coinciden en su contenido estructural expresable en un lenguaje formal de primer orden, pero pueden tener diferencias estructurales (expresables en lenguajes formales de orden superior) que ese lenguaje es incapaz de expresar. Así, los modelos no estándar de la teoría aritmética de primer orden TAN) son elementalmente equivalentes al sistema numérico estándar N, pero no son isomorfos con él, | Además, ambas relaciones tienen un "sabor" distinto. La relación de isomorfía es una típica relación de álgebra universal, que interrelaciona sistemas sin pasar por lenguaje alguno. La relación de equivalencia elemental, por el contrario, es una típica relación de teoría de modelos, que interrelaciona sistemas a base de considerar su relación con las sentencias de un lenguaje formal. Teorías axiomatizables Las teorías más conocidas son las teorías axiomáticas, definidas como el conjunto de las consecuencias de una serie de axiomas efectivamente dados. Lo que exigimos del conjunto de los axiomas es que sea decidible, es decir, que haya un procedimiento automático para decidir o averiguar de cualquier sentencia que se nos presente si esa sentencia es un axioma o no. Si es posible presentar una teoría como teoría axiomática, es decir, si hay.un subconjunto decidible de sus teoremas, tal que todos los teoremas son consecuencias de ese subconjunto, entonces decimos que la teoría es axiomatizable. 231

CONCEPTOS Y TEORÍAS EN LA CIENCIA A ¿AP áíEA AAA A A €xXxb_ A A A A E qá4» (aquí tomado como signo relator y no como relación), así como las siguientes sentencias de ese lenguaje: 0: Vaya (

“TEORÍAS Y MODELOS q$xqRrx--xKA A A A A _—____—_—_ III _IIIMMT€RTg7 > %44RX NN A L, = 101 0%, %, A E Qj [¿ = 101 0,0... %, E 0) L¿ = 10! 0, O)... 0% E 0) La teoría 7, se llama la teoría del orden parcial. La teoría 7, (que es la misma que 7,, ya que 0, 0%, 0%, | = (%,) es la teoría del orden lineal, La teoría 7, es la teoría del orden lineal denso. La teoría 7, es la teoría del orden lineal denso sin extremos. "Todas estas teorías son finitamente axiomatizables, pues acabamos de definirlas en cada caso como el conjunto de las consecuencias de una serie finita de axiomas. "Todas estas teorías son satisfacibles, pues poseen modelos. Así, el sistema formado por el conjunto de los números racionales y la relación de menor o igual entre números racionales es un modelo de cada una de estas teorías. Y otro tanto ocurre con el sistema formado por el conjunto ÍR de los números reales y la relación de menor o igual entre ellos. Por tanto, estas teorías son también consistentes. Las teorías axiomatizables, pero no finitamente axiomatizables, suelen presentarse mediante una lista de axiomas y de uno o varios esquemas axiomáticos. Por ejemplo, la aritmética de primer orden puede axiomatizarse en el lenguaje formal cuyos signos peculiares son la constante individual “0”, el functor monario 's y los functores binarios + ” y *” del siguiente modo: B: 9(0) AVx(p() = > pis) Vx pla) Y: Ax sx) = U Yi Mxy (50) = $9) = > x = y) Y: Vxx + 0 = x Y¿Vxy x + sy) = dx + y) Y: Vx x0 = 0 Y ¿Nay sy) = 0 y + x I = IWwIBY..Y. EW T'es la aritmética de Peano de primer orden, presentada aquí axiomáticamente con ayuda del esquema axiomático 6, que:en 233

realidad no es una sentencia, sino la condensación de un conjunto infinito de sentencias. En efecto, en 6 la letra griega representa cualquier fórmula del lenguaje aritmético con una variación libre, y hay un número infinito de tales fórmulas, cada una de las cuales da lugar a un axioma distinto. Este esquema axiomático es imprescindible. Ningún conjunto finito de sentencias podría sustituirlo. Por tanto, la aritmética de Peano de primer orden no es una teoría finitamente axiomatizable. Sin embargo, para cada sentencia del correspondiente lenguaje se puede averiguar automáticamente sí esa sentencia tiene la forma indicada por $ y es, por tanto, un axioma, o no. Por consiguiente, el conjunto de sentencias [B, Y... Y¿f, aun siendo infinito (pues incluye las infinitas sentencias indicadas por f), es decidible y, por tanto, la teoría de Peano de primer orden es axiomatizable. Esta teoría es también satisfacible, pues el sistema estándar /N de los números naturales con el cero y las funciones de siguiente, adición y multiplicación es un modelo suyo. Teorías completas Los teoremas de que consta una teoría son otras tantas respuestas a posibles preguntas que pueden formularse en el lenguaje de esa teoría. La mayoría de las teorías dejan ciertas preguntas sin respuesta. Para algunas sentencias ocurre que ni Q ni la negación de Q, —— Y, es un teorema de la teoría. Son teorías incompletas. Una teoría completa, por el contrario, es una teoría que da respuesta a todas las preguntas que puedan formularse en su lenguaje. Sea 7 una teoría cuyo lenguaje es “£. Definimos: Tes completa si y solo si para cada sentencia Y de £ pe To PE de La teoría de un sistema siempre es completa. En efecto, dado el sistema SÍ y una sentencia Y de un lenguaje homólogo, ocurrirá 234

 que Í satisface Y o que “L no satisface Y. Por la definición de la satisfacción, en el primer caso tenemos que pe TH4%L), en el segundo que -p€ Th(sé). Por tanto, ThH(AÁ) es una teoría completa. Un interesante teorema pone en relación la completud de las teorías con la equivalencia elemental de los sistemas: una teoría cualquiera 7'es completa si y sólo si todos sus modelos son elementalmente equivalentes entre sí. En otras palabras: T'es completa si y solo si para cada 4, BE MOd(D): A = D, Uno de los descubrimientos más famosos de nuestro siglo fue realizado por K. Gúdel, en 1931, y se conoce con el nombre de teorema de incompletud de Gódel. Gódel descubrió que la aritmética de Peano (de primer orden) es incompleta. Y no sólo eso. Esa incompletud es irremediable en el sentido de que, por más axiomas que le añadamos, la teoría resultante siempre seguirá siendo incompleta. Una versión del teorema de incompletud de Gódel dice: Toda teoría aritmética axiomatizable y consistente (de primer orden) es incompleta. Podemos definir una teoría aritmética consistente y completa de primer orden como la teoría del sistema estándar N de los números naturales: TAN). Pero TAN) no es axiomatizable. Así pues, podemos tener una teoría aritmética de primer orden axiomatizable y completa, pero entonces no será axiomatizable, Y podemos tenerla consistente y axiomatizable (como la teoría de Peano de primer orden), pero entonces no será completa. El teorema de incompletud de Gódel nos dice que ciertos ideales son inalcanzables, por ejemplo el ideal de obtener una teoría aritmética de primer orden que sea a la vez consistente, axiomatizable y completa, Todo lo cual no es óbice para que otras teorías puedan ser completas. Asi, por ejemplo, y como veremos en el próximo apartado, la teoría del orden lineal denso sin extremos es completa. 235

2 CONCEPTOS Y TEORÍAS EN LA CIENCIA Teorias K-categóricas Los números cardinales miden la cantidad de elementos que hay en un conjunto, tanto si éste es finito (en cuyo caso los números cardinales coinciden con los naturales) como sí es infinito. El menor número cardinal infinito (que corresponde a la cardinalidad del conjunto de los números naturales) es MN, el siguiente es 8, el siguiente £,, etc. Si un conjunto tiene cardinalidad $, (es decir, si es biyectable con el conjunto de los números naturales), se dice que es denumerable. Empleamos la letra griega k para referirnos indistintamente a números cardinales cualesquiera, finitos o infinitos. Y escribimos 1 B| = x para indicar que la cardinalidad del conjunto Bes el número cardinal k. | Elamamos a un sistema Y finito o infinito, según que su universo 4 sea finito o infinito, y atribuimos al sistema la cardinalidad de su universo: 1.4 =1Al. | Dada una teoría T y un número cardinal K puede ocurrir que la teoría T'no tenga ningún modelo de esa cardinalidad Kk, en cuyo caso T no es K-categórica. Puede ocurrir también que la teoría Y tenga modelos de cardinalidad k, pero que esos modelos no sean todos isomorfos entre sí, en cuyo caso Í' tampoco será K-categórica. Para que T sea k-categórica hace falta que T'posea modelos de cardinalidad k y que éstos sean todos isomorfos entre sí. Una teoría Les K-categórica si y sólo si 1) cualesquiera modelos de 7 de cardinalidad K son isomorfos y 2) 1 posee al menos un modelo de cardinalidad k. Por ejernplo, la teoría del orden lineal denso sin extremos (cuyos axiomas vimos anteriormente) es una teoría N,-categórica. Esto significa que cualesquiera dos órdenes lineales densos sín extremos, cuyos universos sean denumerables, son isomorfos entre sí, Por el contrario, la aritmética de Peano de primer orden no es N, -categórica, pues posee modelos denumerables no isomorfos. En efecto, en el modelo estándar de la aritmética, es decir, en el sistema estándar N de los números naturales, no existe ningún individuo que sea mayor que todos los números naturales estándar (es decir, el O, el 236

TEORÍAS Y MODELOS CN siguiente de O, el siguiente del siguiente de 0, etc.), mientras que en ciertos modelos no estándar de la aritmética de Peano de primer orden sí que existen individuos mayores que todos los números naturales estándar, por lo que ambos sistemas no pueden ser 1somorfos, ya que a un individuo mayor que todos los números naturales estándar del modelo no estándar no puede corresponder isomórficamente ningún número del modelo estándar. ¿Cómo sabemos que hay modelos no estándar de la aritmética de Peano de primer orden? Por aplicación del teorema de compacidad: Para cualquier conjunto 1 de sentencias ocurre que si todo subconjunto finito de P es satisfacible, entonces D' entero es satisfacible también. Definamos en el lenguaje de la aritmética el relator «

A a a 1 A A a 1 1 id, lb ME o AA A —_—_—_ formada por ese conjunto infinito de axlomas más los de Peano de primer orden es satisfacible, posee modelos. Esos modelos serán no estándar, pues en ellos había al menos un individuo, a, mayor que todos los números naturales estándar. Una versión del teorema de Lówenheim-Skolem dice; Si una teoría T de primer orden posee modelos infinitos, entonces posee también algún modelo denumerable. Por tanto, uno de los modelos de la teoría aritmética ampliada será denumerable. Y será también un modelo de la aritmética de Peano de primer orden, ya que satisface todos sus axiomas. Por consiguiente, hay modelos denumerables no isomorfos de la aritmética de Peano de primer orden, que, por tanto, 10 es N categórica. El importante teorema de Lós-Vaught pone en relación las nociones de K-categoricidad y completud de teorías: Si una teoría Tes K-categórica para algún cardinal infinito K y todos los modelos de F'son infinitos, entonces 7'es completa. Por ejemplo, la teoría del orden denso sin extremos es N,-categórica y, por tanto, K-categórica para algún cardinal infinito K, a saber, k =8,. Por otro lado, todos. sus modelos son infinitos. Por tanto, la teoría del orden linea! denso sin extremos es completa. La inversa del teorema de Lós-Vaught no vale. Hay teorías completas que no son K-categóricas para ningún K. Teorías decidibles Sean 4 y B dos conjuntos cualesquiera, tales que BE A. Decimos que B es decidible (respecto a 4) sí y solo si poseemos un algorttmo o procedimiento automático que para cualquier elemento x€ Anos permite decidir o averiguar en un número finito de pasos si xe Bosix € B. Si tomamos una teoría como 5 y el conjunto de las sentencias del lenguaje de esa teoría como A, obtenemos la definición de teoría decidible. 238

TEORÍAS Y MODELOS A e A A a a A KA KÁKÁ KJIÓA A < PEA EE> < = > > 2 A A Una teoría Tes decidible si y solo sí existe un algoritmo que, aplicado a cualquier sentencia del lenguaje de 7, nos permite determinar en un número finito de pasos si P es un teorema de 1 o no, es decir, si pE€ Top ET. Una teoría Tes indecidible si y solo si T'no es decidible. La manera directa de probar que una teoría es decidible consiste en ofrecer un procedimiento de decisión para la misma. "lambién hay maneras indirectas de probarlo, haciendo uso de varios teoremas metateóricos que ponen en relación la decibilidad de una teoría con la de otra, o con otras propiedades distintas de la misma teoría. Sirva de ejemplo el siguiente teorema: Si Tes una teoría completa y axiomatizable, entonces 7 es decidible. Puesto que ya vimos que la teoría del orden denso lineal sin extremos es axiomatizable y completa, podemos concluir que es decidible, aunque no hayamos expuesto procedimiento alguno de decisión para la misma. Otro ejemplo de teoría decidible es la teoría de grupos abelianos. La teoría de grupos, sin embargo, es indecidible. Otro ejemplo de teoría indecidible es la aritmética de Peano de primer orden. Teorias categóricas Una teoría es categórica sí y sólo si todos sus modelos son isomorfos. Una teoría categórica proporciona una descripción exhaustiva de la estructura de sus modelos, que de este modo quedan caracterizados estructuralmente del modo más unívoco y completo posible. Por eso, con frecuencia los matemáticos tratan a los diversos modelos isomorfos de una teoría categórica como si fuesen su único modelo, el modelo de la teoría, . Puesto que los modelos de una teoría categórica £'son isomorfos, en especial son elementalmente equivalentes, y por tanto la 239

AA 1 A KI áÁá((á(ÓÓ— A A A AA A teoría Tes también completa. Una teoría categórica siempre es completa. Pero una teoría completa no siempre es categórica. Por ejemplo, la teoría del orden lineal denso sin extremos, que, según vimos, es completa, sin embargo no es categórica, pues entre sus modelos se cuentan tanto el sistema ordenado de los números racionales como el de los números reales, que no pueden ser isomorfos, ya que tienen distinta cardinalidad. Solo sí todos los modelos de una teoría son finitos, podemos, a partir de su completud, inferir su categoricidad. Pero no podemos hacerlo, si la teoría tiene modelos infínitos. Una versión del teorema de Lówenheim-Skolem dice: Si una teoría T tiene al menos un modelo infinito, entonces tiene modelos de cualquier cardinalidad infinita. Este teorema vale para todas las teorías de primer orden. De ahí se sigue que una teoría de primer orden que tenga modelos infinitos no puede ser categórica. En efecto, si tiene algún modelo infinito tiene modelos de distinta cardinalidad infinita. Pero sistemas de distinta cardinalidad no pueden ser isomorfos, pues sus universos no son biyectables. Si una teoría consistente es categórica, entorices es K-categórica para uno y sólo un cardinal K, ya que todos sus modelos tendrán la misma cardinalidad. Si una teoría consistente no es K-categórica para ningún cardinal K, o si es K-categórica para más de un cardinal k, entonces no es categórica. Todas las teorías interesantes de primer orden tienen modelos infinitos y, por tanto, no son categóricas. Las únicas teorías categóricas de primer orden son las que exigen que el universo tenga un número finito determinado en elementos. Por ejemplo, la teoría formada por las consecuencias de (Vxy x = y, Vx Pxj es categórica, pues todos sus modelos (sistemas con un solo elemento en su universo, y una sola propiedad, que tiene ese único individuo) son isomotfos, pero no parece muy interesante.. Para encontrar teorías categóricas interesantes hay que abandonar el marco de los lenguajes formales de primer orden, en que nos hemos movido hasta aquí, y pasar a los de segundo orden. En los lenguajes de segundo orden hay variables X Y Z para subconjun240

TEORÍAS Y MODELOS q€xqEAEQAE = = a A A A a e CAMARA TÁ A AA AA a a tos cualesquiera del universo, y esas variables pueden ser cuantiftcadas. La aritmética de Peano de segundo orden tiene, en vez de los infinitos axiomas resumidos en el esquema $ de la axiomatización de primer orden presentada bajo el epígrafe «Teorías axiomatizables», un solo axioma de inducción (de segundo orden): VZ(ZOA Vx [Lx = > Zaidx)) > Vx Lx) El resto de los axiomas sigue igual. Esta aritmética de Peano de segundo orden es categórica, todos sus modelos son isomorfos entre sí, y carece de modelos no estándar. Ello se debe a que un solo axioma de segundo orden es más fuerte que el conjunto infinito de axiomas de inducción de primer orden. En efecto, con estos últimos cuantificamos sobre todos los conjuntos de números naturales definibles mediante una fórmula, y de ellos sólo puede haber una cantidad numerable, pues sólo hay un número denumerable de fórmulas. Sin embargo, hay una cantidad supernumerable de conjuntos de números naturales (es decir, de partes de N), y sobre todos ellos cuantifica el axioma de inducción de segundo orden. Otras teorías matemáticas importantes, como la de les números reales o la geometría euclídea, son también categóricas, siempre que se formalicen en segundo orden. 241

CAPÍTULO 10 SOBRE EL CONCEPTO DE MODELO

Pinturas y modelos Cuando dilucidamos conceptos, partimos del análisis del uso de los correspondientes términos en el lenguaje, para luego proponer una precisión artificial de los mismos. La precisión propuesta será tanto más aceptable cuanto, por un lado, más exacta, unívoca y fecunda sea y, por otro lado, cuanto menos se aleje de los usos lingilísticos comunes. José Ferrater Mora ha tratado de dilugidar algunos conceptos relacionados con la representación, y en especial los de pintura y modelo '. Me permitiré hacerle algunas críticas y sugerencias desde los puntos de vista indicados. Ferrater considera una serie de fenómenos de representación y de usos lingitísticos correspondientes. Se fija sobre todo en la relación binaria entre una pintura (en su sentido más amplio) x y el objeto pintado y. Ferrater propone como expresión canónica para expresar esa situación la de que “x pinta (o pinta a) y. Esta propuesta terminológica parece desafortunada, pues decir que la pintura ' En su ponencia titulada «Pinturas y modelos», presentada al Simposio de Lógica y Filosofía de la Ciencia celebrado en Valencia en 1971, impresa en Filosofía y Ciencia en el pensamiento español contemporáneo, Tecnos, Madrid, 1973, y José Ferrater Mora: Las palabras y los hombres, Peninsula, Barcelona, 1971. 243.

enuuna. CONCEPTOS Y TEORÍAS EN LA CIENCIA a... A pinta al objeto pintado parece ir frontalmente en contra del uso que normalmente se hace de esas palabras. Lo que suele decirse es que alguien —-

 da parcela de la realidad. Como la teoría es un caso especialmente interesante (al menos para Ferrater y para mí) de pintura, en lo que sigue voy a exponer unas consideraciones sobre el concepto de modelo de (ese tipo de pintura que es) una teoría. Teorías, sistemas y modelos Lo que despierta el interés científico y es sometido a investigación no suele ser tanto un individuo aislado como un sistema. Un sistema es una entidad compleja formada por diversos individuos y por una serie de funciones y relaciones entre esos individuos. Ejemplos de sistemas son el sistema de los números naturales (formado por el O, el 1, el 2, el 3, etc., y la relación de ser el siguiente de), nuestro sistema solar (formado por el Sol, los planetas, los cometas, etc., y sus órbitas, velocidades y distancias), el ecosistema del lago de Bañolas (formado por el agua de dicho lago y los organismos que lo habitan, sus fluctuaciones, y sus relaciones tanto entre ellos —cadenas alimenticias, etc.— como con el entorno), el sistema bancario suizo (formado por los bancos de ese país, sus clientes, sus operaciones, etc.), el sistema español de correos (formado por los carteros, las estafetas, las redes de distribución, la subordinación entre oficinas y personas, etc.). El estudio científico de un modelo aspira a elaborar una teoría del sistema, es decir, un conjunto de enunciados, ecuaciones, fórmulas, esquemas, etc., que permitan describir adecuadamente el funcionamiento presente del sistema, así como. para explicar lo ocurrido en el pasado y predecir lo que pasará en dicho sistema en el futuro. Si el empeño tiene éxito, logramos una teoría del sistema. Las variables de esta teoría se referirán a los individuos del sistema, y sus conceptos corresponderán a las relaciones y funciones. del mismo. Si el sistema funciona tal y como lo indica la teoría, si en él se cumple lo que dice la teoría, decimos que el sistema es un modelo o realización de la teoría. Así, el sistema de los números naturales es un modelo de la teoría aritmética de Peano, nuestro sistema pla245

 netario es un modelo de la teoría de Kepler, el sistema de las placas continentales terrestres es un modelo de la teoría de Weneger, etc. Uno puede aspirar a teorías de más alcance, que sean aplicables no ya a un sistema, sino a toda una clase de sistemas. Así, la teoría de grupos es aplicable al sistema formado por los números enteros y la adición, o al formado por los números racionales menos el cero y la multiplicación, o al formado por los automorfismos de un conjunto cualquiera y la composición, etc. Así, también, la mecánica clásica de partículas es aplicable al sistema formado por la Tierra y la Luna y sus respectivos movimientos, o a nuestro sistema solar entero con los suyos, o al sistema formado por un péndulo y la Tierra, o al formado por las bolas de billar en una mesa determinada, etc. Así también, la teoría limnológica es aplicable a todos (o a muchos) lagos. A veces ocurre que la teoría elaborada para un solo sistema resulta tener también otros modelos. Así, lo dicho por la teoría aritmética de Peano no sólo se cumple en el sistema de los números naturales, para el que fue construida, sino en muchos otros sistemas, que son otros tantos modelos (por así decir, involuntarios) de esa teoría, Y la teoría mecánica clásica de partículas no sólo se cumple en los sistemas (Tierra, Luna, mareas; sistema solar; Tierra y péndulo; Tierra y proyectil...) en los que Newton pensaba al elaborarla —es decir, en sus modelos paradigmáticos—, sino que también es aplicable a muchos otros sistemas, tiene muchos otros modelos, como la comunidad científica formada en torno a ella se encargaría de mostrar. En definitiva, lo que Kuhn llama «ciencia normal» (la actividad de una comunidad científica formada en torno a una teoría) consiste fundamentalmente en la búsqueda de nuevas aplicaciones de la teoría, en el descubrimiento de otros sistemas en que se cumple, de nuevos modelos suyos. También puede ocurrir que la teoría elaborada —aunque coherente e incluso brillante carezca ——al menos hasta hoy-—- de modelos reales, de aplicaciones. Así, quizá determinadas teorías económicas sólo serían aplicables (sólo tendrían como modelos) a sistemas económicos donde la competencia, transparencia y elasti246

ll A A A a e + sá es un sistema si y solo si para algún 4, £K ... KR: E AO. E E O) AFO (3) Para cada ¿(1 < < nm): R, es una relación en A, es decir, para algún número mm (que representa la aridad de R): REA". Dos sistemas son similares si tienen el mismo número de relaciones y a cada relación raria del uno corresponde otra relación n-aría del otro. Sean A = XAR . R > yyB = XB S, ... S,) dos sistemas, SÍ y 9 son similares si y sólo si (1) n = m y (2) para cada (1 sí en dicho lenguaje hay precisamente n predicados lo relatores) P.... P, y ocurre que para cada ¡(1 < 1 < nm), el número ario del predicado P. de £ es igual al de la relación R.de Y, Sean Á = (AR. RyyB = KBS, ... $) dos sistemas similares y homólogos con la teoría T, foimulada en un lenguaje con los predicados P, ... P.. Dado un teorema QL de la teoría 7, podemos interpretar ol sobr el sistema SÍ suponiendo que las variables 248

SOBRE EL CONCEPTO DE MODELO A A — A A A A A q $qEPEEÓA;

egrafiado. Así, se habla del modelo de un pintor o un escultor, de la modelo de un fotógrafo, del auge de la profesión de modelo, etc. Pero otras veces se usa «modelo» para designar el extremo opuesto de la relación, es decir, la pintura, la escultura, la representación, la maqueta *. Así, se habla del modelo de un barco, del modelo (o maqueta) a escala reducida de un edificio, erc. Esta radical equivocidad del vocablo "modelo" en el lenguaje ordinario se ha trasladado a la ciencia, dando lugar a dos usos opuestos de la palabra. En las ciencias formales se habla de modelo como de aquello a lo que se refiere la teoría, como lo que está frente a la teoría, como (exagerando) lo opuesto a la teoría. Es el sentido que lleva la voz cantante en la teoría de modelos, En las ciencias empíricas, sin embargo, con frecuencia se habla de modelos en otro sentido; a veces, incluso se habla de modelo como sinónimo de teoría. Así, los economistas O los psicólogos dicen que buscan un modelo para explicar un sistema que les interesa, queriendo decir que buscan una teoría que describa adecuadamente ese sistema. Dado que el primer significado de la palabra "modelo" -—modelo como lo opuesto a teoría, modelo como sistema en que se cumple lo que dice la teoría-——— ha sido el más precisado, estudiado y desarrollado —ahí está el formidable arsenal conceptual de la teoría de modelos, quizá sea conveniente darle la preferencia al menos en el campo de la metodología * Donde se emplea la palabra "modelo" como sinónimo de teoría, lo más práctico quizá sería dejar de usarla en dichos contextos y sustituirla por la palabra teoría", de uso mucho menos confundente. Respecto a los otros usos de "modelo" en la ciencia empírica, convendría precisarlos en función de los conceptos desarrollados a partir de la teoría de modelos, 3 Ferrater sólo parece ser consciente en su ponencía de este segundo uso de «modelo» en el lenguaje ordinario (Las palabras y los hombres, Península, Barcelona, 1971, pp. 139, 143 y 144, o Filosofía y ciencia en el pensamiento español contemporáneo, pp. 89 y 92), pero no del primero. * Esta postura ya fue mantenida por Patrick Suppes en «A comparacion of the meaning and uses of models in mathematics and the empirical sciencas», impreso en The concept and the role of the model in matbematics and natural and social sciencias (D. Reidel, Dordrecht, Holanda, 1961). 250

SOBRE EL CONCEPTO DE MODELO A máxime ahora que estos conceptos encuentran creciente aplicación en las investigaciones metodológicas sobre las teorías físicas". Servir de modelo En las ciencias empíricas con frecuencia ocurre que el sistema que se quiere describir teóricamente es enormemente complicado y que el investigador no sabe cómo hincarle el diente, no sabe por dónde empezar. Á veces lo que hace es buscar o construir otro sistema «que le sirva de modelo» para el estudio del primero. Si estudiamos el tránsito rodado en Barcelona y nos perdemos en la complejidad del tema, sin llegar a resumirlo en principios o ecuaciones esclarecedoras, quizá encontremos la inspiración estudiando otro sistema que tenga algunas características en común con el tránsito en Barcelona, pero que sea más simple o mejor conocido y estudiado ——como el flujo de líquidos de densidad variable por un sistema de canales de perfil variable. Es decir, el flujo de dichos líquidos nos puede quizá servir de modelo para estudiar el tránsito rodado en Barcelona?. Si queremos estudiar la resistencia que ejercerá el aire sobre un determinado avión a diversas velocidades, la investigación directa puede resultar peligrosa y llena de problemas y dificultades. Una manera racional de proceder consistirá en construir una maqueta a escala del avión en cuestión y una cámara de ensayo donde podamos provocar corrientes controladas de aire, en estudiar cómo funciona ese sistema simple (qué resistencia opone el avión-maqueta a las corrientes de aire de la cámara) y en formular una teoría que lo 5 Piénsese en el importante papel que juegan los modelos en la reconstrucción de las teorías físicas por P. Suppes,]. Sneed, G. Ludwig, van Fraassen y otros filósofos de la ciencia actuales; SN: $ Varios ejemplos —entre ellos, uno casi igual que ésre-—— de sistemas que sirven de modelos para el estudio de otros se encuentran en la ponencia de Ferrater. Véase la p. 147 de Las palabras y los hombres o las pp. 94-95 de Filosofía y ciencia en el ed | español contemporáneo. 251

 describa adecuadamente. Con un poco de suerte, esa misma teoría será aplicable también al sistema formado por el avión grande y los vientos de verdad. El avión-maqueta y la cámara de viento nos habrán servido de modelo para estudiar la resistencia del avión grande al viento de verdad —que es lo que nos interesa. ¿Qué ocurre en estos casos? Queremos describir teóricamente —construir una teoría que nos sirva para explicar y predecir— un sistema muy complicado y poco conocido, y no sabemos cómo proceder directamente. Entonces seguimos un camino indirecto. Nos fijamos en otro sistema más simple o mejor conocido que el primero, pero que posea algunos de sus rasgos o características, que se le parezca en algún respecto que intuitivamente nos parezca relevante. Si no encontramos tal sistema, lo construimos (con plástico, madera y acero o, al menos, con la imaginación). En cualquier caso, nos encontramos con dos sistemas: el que nos interesa, pero que nos resulta demasiado complicado o desconocido, y el que se le parece en algo, pero que es más simple o mejor conocido o más fácilmente estudiable. Construimos una teoría que describa adecuadamente el funcionamiento del sistema simple, que tenga al sistema simple por modelo. Y, finalmente, tratamos de aplicar esa misma teoría al sistema complejo o' desconocido. Pueden pasar dos cosas. Puede que en el sistema complejo no se cumpla lo que dice la teoría elaborada a partir del sistema simple. En ese caso decimos que ese sistema simple o conocido no sirve como modelo del sistema complejo o desconocido. Y hay que volver a empezar o buscar la inspiración por otro camino. Pero puede que en el sistema complejo sí se cumpla lo que dice la teoría elaborada a partir del sistema simple. Entonces decimos que el sistema simple o conocido sirve como modelo del sistema complejo o desconocido. En ese caso, ambos sistemas son modelos de la misma teoría y, por tanto, tienen ciertas propiedades estructurales en común, tienen cierta estructura en común (a saber, la estructura caracterizada por la teoría en cuestión). El servir de modelo es, pues, algo distinto de (pero reducible a) ser modelo de. 232

Podemos decir que el sistema Y sirve de modelo del sistema % al científico /h si y solo si (1) Les más simple o resulta más conocido para h que %, (2) a partir de s£ / desarrolla la teoría 7) de la que sé es un modelo y (3) % es también un modelo de 7. Es de esperar que otras expresiones usadas en las ciencias emplricas en las que aparezca la palabra modelo" sean igualmente reducibles al concepto de modelo que se usa en teoría de modelos, aunque la mayor parte del trabajo —evidentemente— está todavía por hacer. De todos modos, y para terminar, hay que reconocer que también sería coherente usar la palabra “realización” en vez de “modelo para lo que se llama modelo en la teoría de modelos y reservar la palabra modelo” para la descripción teorizada de un sistema real. Este proceder incluso tendría la ventaja de concordar mejor con el uso lingúístico habitual en la ciencia empírica. 233

CAPÍTULO 11 SOBRE TEORÍAS FÍSICAS Y TEORÍAS MATEMÁTICAS

La tesis del abismo

Al menos desde Hume, el análisis filosófico de la ciencia ha solido recrearse en subrayar el abismo insalvable que al parecer separa las teorías matemáticas de las teorías físicas. Las primeras serían analíticas, tautológicas, formales y ciertas, aunque limitadas al desmenuzamiento de las relaciones entre nuestras ideas o nuestros signos. Las segundas serían sintéticas, factuales, experimentales y provisionales, pero pretenderían describir la realidad empírica del mundo. |

Recordemos las palabras finales del ensayo de Hume sobre el entendimiento humano: «Si cogemos en nuestras manos un libro cualquiera..., preguntémonos: ¿Contiene algún razonamiento abstracto sobre la cantidad o el número? No. ¿Contiene algún razonamiento experimental sobre asuntos de hecho y existencia? No. Arrojémoslo entonces a las llamas, pues no puede contener sino sofismas y engaños» *. Lo que aquí nos interesa de este texto no es el deseo en él manifestado de quemar la literatura seudocientífica, sino el hecho de que, para separar lo que es ciencia de lo que no lo

' D. Hume: An Enquiry Concerning Human Understanding, 1748.

CONCEPTOS Y TEORÍAS EN LA CIENCIA es, 2 Hume no le baste con formular una sola pregunta, sino que se vea obligado a formular dos preguntas distintas, destinadas fundamentalmente a salvar de la hoguera las teorías matemáticas y las físicas, respectivamente. En nuestro siglo esta tesis del abismo que separaría la matemática y la física no ha hecho sino extenderse y ampliarse entre los filósofos. Así, por ejemplo, en el primer párrafo del prefacio del libro más popular de Ayer leemos: «Como Hume, yo divido todas las proposiciones genuinas en dos clases: las que, en su terminología, tratan de "relaciones de ideas y las que tratan de "asuntos de hecho". La primera clase comprende las proposiciones a priori de la lógica y la maternática pura, de las que admito que son necesarias y ciertas, puesto que son analíticas. Es decir, mantengo que la razón por la que estas proposiciones no pueden ser refutadas en la experiencia es que no afirman nada acerca del mundo empírico, sino que se limitan a registrar nuestra determinación de usar los símbolos de una cierta manera. Por otro lado están las proposiciones sobre asuntos fácticos, de las que sostengo que son hipótesis que pueden ser probables, pero nunca ciertas...»?, etc. Aunque con distintos matices, casi todos los filósofos actuales de inspiración emplrista —¿y qué filósofo que se ocupe de la ciencia no lo es?-— han aceptado y elaborado la tesis dei abismo entre la matemática y la física. Una de las pocas excepciones es Quine. Dos de los rasgos más peculiares de la filosofía de Quine son su rechazo de la dicotomía analitico-sintético y su especial tipo de holismo, que mete las teorías matemáticas y las físicas, e Incluso todas las teorías científicas, en un mismo saco, saco que, en su integridad, es lo único que directamente podemos contrastar con la experiencia. Evidentemente esto implica el rechazo de la tesis del abismo. Esta peculiaridad de la filosofía de Quine siempre me había resultado especialmente difícil de digerir. Sin embargo, los * A.]. Ayer: Language, Truth and Logic, Londres, 1936. 256

.. CONCEPTOS Y TEORÍAS EN LA CIENCIA A IN RÁ A a orden) y dejar la caracterización de los modelos de la teoría para un correspondiente metalenguaje conjuntista informal; y otra manera informal, consistente en la definición de un predicado conjuntista que caracterice directamente a los modelos de la teoría en un lenguaje conjuntista informal. Consideremos, por ejemplo, la teoría de grupos. La teoría de grupos puede axiomatizarse formalmente mediante las siguientes tres sentencias de primer orden: (D) Vxz(xopoz = xo0 (yo 3) (Q) Vxyldzxoz = y 9). WITT EN Dados estos tres axiomas así formalizados, la teoría de modelos de la lógica de primer orden determina unívocamente cuáles son sus modelos, es decir, los grupos. Pero esa determinación ocurre en el metalenguaje.. La axiomatización informal de la teoría de grupos tiene lugar mediante la definición explícita del predicado conjuntista de ser un grupo del siguiente modo. | X es un grupo si y solo si hay D, o, tales que (D X = (D 0) (2) DIV (Sd) o: DxD = aD (4) paracada x, y 2€ D:(xoyoz = x0 (yo 2) (5) para cada x y€ Dhay un ze Dcon: xoz = y (6) para cada x, y€ Dhayunz€ Dcon: 20x = y Las líneas (1) a (3) de esta definición caracterizan lo que es un modelo posible de la teoría de grupos, una entidad o sistema del que tiene sentido preguntarse si efectivamente es un grupo o no. Las líneas (4) a (6) corresponden a los axiomas formales anteriormente presentados y sirven para determinar, dentro de la clase de los modelos posibles, la subclase de los modelos, es decir, de los grupos. 258

SOBRE TEORÍAS FÍSICAS Y TEORÍAS MATEMÁTICAS A e A A A A A AA A NN NA e O TIO AI NN IDAS Dos teorías matemáticas Para familiarizarnos con el concepto de axiomatización informal de una teoría mediante la introducción de un predicado conjuntista, consideremos dos ejemplos más, el de la teoría de los espacios vectoriales y el de la teoría de las probabilidades. La teoría de los espacios vectoriales queda axiomatizada mediante la siguiente definición del predicado conjuntista de ser un espacio vectorial. X es un espacio vectorial sí y solo sí hay D, $), O, tales que | DD X= oD (4 O:RxD>D (5) paracadaxpzeD:«ByOz2=x000 2 (6) paracada x, ye Dhayunze Dcon:xDz=y (7) paracadaxyeD:xDy=yBDx (8) paracadaa, BE R,xeD:(a-BOx=a0BOx) (9) paracadaaoeR,xyeD:aOX«xDOy=(10I0 (a O y (10) paracadaa,PBeR,xe D:(a+ BM O0x=(a DIO (BO x) (1) paracadaxeD:1Ox=x Intuitivamente, D representa aquí el conjunto de los véctores; E), la adición vectorial; (, el producto de un escalar con un vector; +, la adición de números reales; -, el producto de números reales. Las líneas o axiomas (1) a (4) de esta definición caracterizan los modelos posibles de la teoría de espacios vectoriales, las entidades o sistemas de los que tiene sentido preguntarse si son espacios vectoriales o no. Las líneas o axiomas (5) a (11) determinan la clase de modelos efectivos de la teoría, es decir, la clase de los espacios vectoriales. Dicho de otra manera, (1) a (4) nos dicen cuándo pode27

Á_2ÁAÁA2 ÁS A áÁÁ A A A a A A A O o A ld PA a A E NS E rr mos preguntar de un sistema si constituye un espacio vectorial o no; (5) a (11) nos dicen en qué casos nuestra respuesta a esa pregunta ha de ser afirmativa, La teoría de la probabilidad queda axiomatizada mediante la siguiente definición del predicado conjuntista de ser un espacio de probabilidad. X es un espacio de probabilidad sí y solo sí hay D, E, p, tales que O) EFD Ec D (3) DCEPE (4) paracadaxe D:xe D (5) para cada sucesión (x),. de elementos de D 10 x. € D (6) p: D= >R*U 10) D) AD =1 (8) para cada sucesión (x),., de elementos de D disjuntos entre sí: p (Y x)= 2 pix). 16€ y intuitivamente, E representa aquí el espacio muestral o conjunto de resultados posibles, D corresponde al conjunto de sucesos y pes la función de probabilidad. Las líneas o axiomas (1) a (6) de esta definición caracterizan los modelos posibles de la teoría de las probabilidades, las entidades o sistemas de los que tiene sentido preguntarse si son espacios de probabilidad o no. La determinación de cuáles de entre estos sistemas sean realmente modelos de la teoría, es decir, espacios de probabilidad, corre a cargo de los axiomas (7) y (8). La mecánica clásica de partículas Después de haber puesto dos ejemplos de axiomatización informal de teorías matemáticas, vamos a considerar ahora la parte más 260

A e básica de la mecánica de Newton como ejemplo de teoría física axiomatizable mediante la introducción de un predicado conjuntIsta. Como es bien sabido, Newton pone a la cabeza de sus Principía sus famosas tres leges motus. La segunda de ellas dice que la fuerza total que actúa sobre una partícula es igual al producto de la masa de esa partícula por la aceleración por ella sufrida, La primera ley dice que una partícula permanece en su estado de reposo o movimiento rectilíneo y uniforme (es decir, su aceleración es 0) mientras no actúen fuerzas sobre ella. Esta primera ley es evidentemente una consecuencia de la segunda, pues si el miembro izquierdo (es decir, la fuerza que actúa sobre la partícula) de la ecuación en que se expresa la segunda ley es 0, entonces el miembro derecho ha de ser también 0; pero ese miembro derecho es el producto de dos factores, uno de los cuales —la masa— no puede ser 0; luego la aceleración ha de ser 0, que es precisamente lo que afirma la primera ley. Siguiendo a Sneed vamos a llamar una mecánica clásica de partículas a un sistema que cumple la segunda (y, por tanto, también la primera) de las leges motus de Newton. $1, además, el sistema cumple también la tercera ley —la que dice que para cada fuerza ejercida por una partícula sobre otra hay otra fuerza igual en magnitud y de sentido contrario que la segunda partícula ejerce sobre la primera—, diremos que el sistema es una mecánica clásica newtoniana de partículas. Si, además, el sistema cumple también la ley de la gravitación —que dice que la fuerza ejercida por una particula sobre otra es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de su distancia—, diremos que incluso se trata de una mecánica clásica newtoniana gravitatoria de partículas. Así como todo grupo conmutativo es un grupo, pero no a la inversa, así también toda mecánica clásica newtoniana de partículas es una mecánica clásica de partículas, pero no a la inversa. Para no complicarnos la vida, vamos a considerar el caso más sencillo: el de la teoría de las mecánicas clásicas de partículas. Esta 261

teoría puede ser informalmente axiomatizada mediante la definición de un predicado conjuntista de la siguiente manera. X es una mecánica clásica de partículas sí y solo si hay E, Ts, m, f tales que (O X = XE Ts mbfP) > (2) EFODyEss finito (3) Tes un intervalo de números reales (4) s: ExT—oR y para cada pe Ey cada te T: Désip, 1) existe () m: E ¡R* (6) fEXTxw-»R y para cada pe Ey te T: z Pp, E 2) es absolutamente convergente (7) para cada pe Ey te T: mp - Disp, 1) = E Fo, bi) intuitivamente, £ es un conjunto de cuerpos o partículas, 7 representa aquí un lapso de tiempo, los functores s, m y fcorresponden a los conceptos de posición, masa y fuerza, Déxp,) —la segunda derivada de la posición respecto al tiempo— es la aceleración de la partícula p en el momento £, y (, el conjunto de los números naturales. | Los axiomas (1) a (6) caracterizan la clase de los modelos posibles de la teoría, las entidades o sistemas de los que tiene sentido preguntarse si son mecánicas clásicas de partículas o no. El axioma (7), que corresponde a la segunda lex morus de Newton, determina cuáles de entre estos sistemas son los modelos de la teoría, es decir, son mecánicas clásicas de partículas. El modelo cósmico Según la concepción tradicional de las teorías científicas, tanto una teoría matemática como una teoría física serían conjuntos de 262

PA teoremas. La diferencia entre amabas estribaría en que la primera -—la teoría matemática— podría tener diversos modelos, por lo que sus teoremas no serían enunciados verdaderos o falsos, sino meras fórmulas o filas de signos, susceptibles de adquirir diversos significados y —en el caso de las teorías no categóricas, que es el más frecuente entre las de primer orden— distintos valores de verdad según el modelo en el que se los interpretase. La teoría física, por el contrario, estaría atada a un modelo único, el mundo real o material en su totalidad, por lo que sus teoremas serían enunciados verdaderos o falsos. En los casos concretos aquí considerados ocurre que, mientras que nadie discute que los axiomas de la teoría de grupos, de espacios vectoriales o de la probabilidad son fórmulas susceptibles de múltiples interpretaciones en modelos distintos, los filósofos clásicos de la ciencia consideran que los axiomas de la teoría de la mecánica clásica de partículas son enunciados verdaderos o falsos, cuyas variables varían sobre todas las partículas o cuerpos que hayan existido, existan o existirán en cualquier lugar del universo. Así, por ejemplo, leemos en Hempel que «las leyes de la mecánica de Newton son lo que llamaremos enunciados de forma estrictamente universal o enunciados estrictamente universales. Un enunciado de esta forma es una afirmación —que puede ser verdadera o falsa—-— de que todos los casos que reúnen ciertas condiciones especificadas tendrán sin excepción alguna tales y tales características. Por ejemplo... la primera ley del movimiento de Newton, que dice que cualquier cuerpo material sobre el que no actúan fuerzas externas permanece en su estado de reposo o movimiento rectilíneo y uniforme» *. Y en otro lugar añade Hempel que un enunciado de este tipo —una ley física— «dice que en cualquier momento y en cualquier lugar en que se den unas condiciones de un tipo especificado F se darán también, siempre y sin excepción, ciertas condiciones de otro tipo G»?. i C.G. Hempel: Aspects of Scientific Explanation, Nueva York, 1965, p, 173. > C.G. Hempel: Philosophy of Natural Science, Englewood Cliffs, 1966, p. 354. 263

 Este modelo único, que abarcaría la totalidad del universo y del espaciotiempo y que convertiría las leyes de una teoría física en enunciados universales verdaderos o falsos, es lo que aquí llamaremos el modelo cósmico. Es fácil ver que la concepción según la cual una teoría física es un conjunto de enunciados referentes al modelo cósmico está en la base tanto de la filosofía clásica de la ciencia como del refutacionismo de Popper. La historia de la ciencia nos muestra que normalmente las teorías físicas son aplicadas a sistemas físicos parciales y bien delimitados, y no al modelo cósmico. En el caso concreto que nos ocupa, la teoría de la mecánica clásica de partículas fue aplicada por primera vez por Newton a diversos sistemas que resultaron ser modelos de la teoría: el sistema planetario del Sol, el sistema formado por la Tierra y la Luna, el sistema formado por Júpiter y sus satél:tes, el sistema formado por los cuerpos en caída libre en la superficie terrestre, el sistema formado por los péndulos y la Tierra, etc. En cada uno de estos modelos de la teoría se entiende por partícula algo distinto: en el uno las partículas son el Sol y los planetas; en el otro, la Tierra y la Luna; etc. Desde luego hubiera sido posible que algunos de esos sistemas hubieran sido modelos de la teoría y otros no. En cualquier caso, esta sucesión impresionante de aplicaciones exitosas de la teoría, este fastuoso desfile de modelos, impresionó considerablemente a los físicos coetáneos y posteriores a Newton. Esta clase de aplicaciones primeras de la teoría se convirtió en un paradigma -—en uno de los sentidos en que Kuhn * emplea esta palabra— a imitar. Lo que los físicos siguientes harían sería desarrollar la teoría mecánica de Newton en al menos dos direcciones distintas: por un lado, buscando nuevos sistemas a los que aplicarla, nuevos modelos de la teoría; y por otro, extendiendo la teoría con leyes especiales que diesen lugar a predicados conjuntistas más restringidos, a extensiones de la teoría básica que sólo valdrían para algunos de sus modelos, pero que aumentarían su fuerza predictiva en éstos. * T. Kuhn: Postscript to The Structure of Scientific Revolutions, Chicago, 1970, 264

| Pe No se trata de excluir el modelo cósmico. De hecho, una teoría física puede tener modelos más o menos comprensivos, de los que el modelo cósmico sería un caso límite. Incluso hay teorías cosmológicas, que sólo son aplicables al modelo cósmico. Pero ése- es un caso excepcional. En general, una teoría física tiene multitud de modelos más restringidos que el modelo cósmico. Y sólo de los sistemas físicos restringidos podemos constatar con alguna seguridad dentro, claro está, de las limitaciones impuestas por la relativa imprecisión de los instrumentos de medida— si son modelos de la teoría o no. Una teoría física, como una teoría matemática, puede ser aplicable en unos campos y no serlo en otros, puede tener a unos sistemas físicos por modelos y a otros no. El que no se cumpla lo predicho por la teoría en un nuevo sistema bajo estudio muestra a lo sumo que ese sistema no es un modelo de la teoría, pero no la refuta. De hecho, y como ha señalado Kuhn", una teoría física no puede ser refutada en general mediante resultados negativos de observaciones o experimentos, aunque esos resultados sirven para delimitar el alcance de la teoría. Y eso no tiene nada de irracional ni relativista. Es lo que ya estábamos acostunbrados a pensar de las teorías matemáticas. De todos modos, no conviene exagerar la similitud entre teorías físicas y teorías matemáticas. Una de las diferencias fundamentales estriba en la complejidad mucho mayor de la teoría de modelos de las primeras, Según Sneed, uno de los aspectos más importantes de esa complejidad está constituido por las condiciones de ligadura. Los axiomas de una teoría matemática expresan ya explícitamente todas las condiciones que ha de cumplir un sistema para que la teoría le sea aplicable. No hace falta comparar unos modelos posibles con otros; basta con comparar cada uno de ellos por separado con los axiomas de la teoría. Pero con una teoría física pasa lo contrario. La teoría no es aplicable sin más a cualquier clase de modelos posibles que satisfagan sus axiomas. Además de eso es * T. Kuhn: «No process yet disclosed by the historical study of scientific development at all resembles the methodological stereotype of falsification by direct comparison with nature», Ibidem, p. 77. 265

A A a necesario que esos modelos posibles estén relacionados entre sí de ciertas maneras, es decir, es necesario que satisfagan determinados constraints o condiciones de ligadura *. Volvamos a nuestra teoría de la mecánica clásica de partículas. Evidentemos dos modelos posibles de la teoría pueden tener elementos comunes en sus dominios. Por ejemplo, la Tierra es un elemento —-o partícula ———- común del sistema planetario del Sol y del sistema formado por la Tierra y la Luna. Sean H» y

SOBRE TEORÍAS FÍSICAS Y TEORÍAS MATEMÁTICAS A ao A A A

Nm o e A A e e e a OA pi X es una cinemática sí y solo si hay E, T, s, tales que (1) X = XE £L 5) (2) Ex y Ees finito (3) Fes un intervalo de [K (40 s: EXT y para cada pe E y te T:.D* K p, 1) existe Una cinemática es una situación observable y registrable con independencia de la teoría mecánica, un conjunto de objetos junto con sus trayectorias en un tiempo determinado. Por ejemplo, el Sol y Marte, junto con la trayectoria de Marte en torno al Sol observada y registrada por Kepler entre 1600 y 1605, constituyen una cinemática. Y dos bolas de billar sobre una mesa, junto con sus trayectorias durante los últimos diez segundos anteriores y posteriores a la última jugada de una partida de billar determinada, constituyen también una cinemática. Precisamente las cinemáticas son el tipo de entidades que pueden eventualmente ser explicadas por nuestra teoría. Explicar un sistema cinemático significa completarlo mediante la introducción de funciones teóricas de masa y fuerza de tal modo que (1) las condiciones de ligadura respecto al conjunto de las aplicaciones paradigmáticas de la teoría queden satisfechas y (2) el sistema así complerado (que será por tanto un modelo posible) sea un modelo de la teoría, es decir, sea una mecánica clásica de partículas. ¿Qué es una teoría física? En la concepción de Sneed, una teoría física no es un conjunto de enunciados y ni tan siquiera un conjunto de fórmulas. Pero aunque ya hemos dicho lo que no es, parece más interesante hablar de lo que es. En resumidas cuentas, una teoría física estaría formada por un núcleo estructural y un conjunto de aplicaciones propuestas. |

AA DARA ATEN OS RIA NAAA PARAR El núcleo estructural de una teoría describe su estructura matemática. El núcleo estructural de una teoría física en sentido de Sneed consta de diversas clases: en primer lugar, la clase de todos los modelos posibles parciales de la teoría, es decir, de todos los sistemas observables y describibles con independencia de la teoría y que eventualmente podrían ser explicados por ella; en segundo lugar, la clase de todos los modelos posibles, especificada por los primeros axiomas; en tercer lugar, la clase de los modelos, especificada por los últimos axiomas; en cuarto lugar, una función que a cada modelo posible le asigna un modelo posible parcial, a saber, el sistema que consta de su mismo dominio y sus mismas funciones no teóricas; y finalmente, la clase de los conjuntos de modelos posibles ligados entre sí por las condiciones de ligadura. Más precisamente podemos definir: X es un núcleo estructural sí y solo si hay M,,, M, M, r, Ctales que (1) X = M, (6) CC PM, y para cada xe M; de C En el caso de la teoría de la mecánica clásica de partículas, M, es la clase de las cinemáticas, MM_ es la clase de los sistemas que cumplen los axiomas (1) a (6) de la teoría, Mes la clase de los sistemas que cumplen los axiomas (1) a (7), r es la función que a cada modelo posible asigna el correspondiente modelo posible parcial (E, 1 s > y Ces la clase de los conjuntos de modelos posibles que satisfacen las condiciones de ligadura de invariancia del valor de 2 para cada individuo común a diversos sistemas, extensividad de m e invariancia respecto a transformaciones de Galileo. 269

A A A A e A A A a —— - A A A A A —É Además del núcleo estructural una teoría contiene un conjunto de aplicaciones propuestas, entre las que se encontrarán las aplicaciones paradigmáticas que pusieron en marcha la empresa clentifica asociada a la teoría, más otros sistemas o situaciones que parecen poder explicarse satisfactoriamente con ella. De todos modos, para que el conjunto A de aplicaciones propuestas sea admisible, ha de cumplir determinadas condiciones. Á ha de ser un conjunto de modelos posibles parciales que, mediante la introducción de adecuadas funciones teóricas, dé lugar a un conjunto de modelos posibles que, por un lado, sean modelos de la teoría y, por otro, constituyan entre todos un conjunto ligado por las condiciones de ligadura. Sea H un múcleo estructural con su función r:M, MM, Destgnaremos mediante ru] a R (r| u), lo que a veces también se escribe ru. Definamos la función XK : PM, >9PM,,, tal que para cada XCM : ROJ=r14]. Pues bien, ahora podemos definir precisamente la clase ad E) de los conjuntos de modelos posibles parciales de H que constituyen conjuntos admisibles (en el sentido arriba indicado) de aplicaciones propuestas de /7, ad = RÁIMOC) Con esto estamos en posición de decir lo que es una teoría física en sentido de Sneed. Una teoría física es un par ordenado compuesto por un núcleo estructural y un conjunto admisible de aplicaciones propuestas de ese núcleo. X es una teoría física si y solo si hay El, A, tales que 0 10d (2) Hes un núcleo estructural (3) Ac ad(H) A lo largo del desarrollo histórico de la teoría, el conjunto A de aplicaciones propuestas puede ir variando. Normalmente esta 270

 A a a o ls ll diia rl. lla DENT CAAARAA variación consistirá en el progresivo añadido de nuevas aplicaciones a A. Pero también puede pasar que nuevas mediciones den al traste con alguna presunta aplicación, que pasará entonces a ser expulsada del conjunto A de aplicaciones propuestas. Ál menos mientras no se trate de alguna de las aplicaciones paradigmáticas, la teoría seguirá siendo la misma. La teoría conservará su núcleo estructural e irá variando su conjunto de aplicaciones propuestas en el sentido de un progresivo crecimiento, aunque con eventuales disminuciones de vez en cuando. Además, extensiones del núcleo estructural mediante la formulación de axiomas o leyes especiales permitirán un más completo poder explicativo en determinados grupos especiales de aplicaciones. La concepción de Sneed ——que aquí no hemos hecho sino esbozar de modo muy simplificado— es ciertamente más complicada que la concepción tradicional de las teorías físicas, pero respecto a ella pretende poseer tres ventajas esenciales: por un lado, permite precisar una serie de nociones importantes, como las de identidad o equivalencia entre varias formulaciones distintas de una misma teoría física y la de reducción de una teoría a otra; por otro, ofrece un enfoque nuevo de problemas tradicionales que habían acabado en un callejón sin salida, como el de los términos teóricos; y en tercer lugar, la concepción de Sneed quizá permita dar cuenta de la dinámica de las teorías físicas?, tal como ésta ha sido descrita por Kuhn, en cuyo. caso estaría libre de las objeciones que desde un punto de vista histórico pueden hacerse a la filosofía convencional de la ciencia. Para terminar, no estará de más una advertencia. Aunque en este artículo estoy subrayando más las semejanzas que las diferencias entre las teorías matemáticas y las teorías físicas en sentido de Sneed, hay que reconocer que también en esta concepción existen grandes diferencias entre ambas. La distinción entre núcleo estruc2 W, Sregmiiller: Theorie und Erfabrung Il, Theorienstrukturen und Theofiendynamir, Berlín- Heidelberg, 1973. (Ed. cast.: Estructura y dinámica de teorías, Ariel, Barcelona, 1983.) Véase también el libro de Moulines mencionado en la nora anterior. 2/1

 tural y campo de aplicaciones propuestas, la presencia de un conjunto paradigmático de aplicaciones, la distinción entre conceptos teóricos y no teóricos (dependiente de factores históricos y pragmáticos, tales como el desarrollo alcanzado por los métodos de medición en un momento determinado), la predicción de valores observables" de las funciones no teóricas, etc., son otros tantos rasgos peculiares de las teorías físicas y ausentes de las matemáticas. Además, la determinación de los modelos de las teorías matemátlcas se realiza a priori y con absoluta seguridad, mientras que la determinación de los modelos de las teorías físicas es empresa ardua, empírica y provisional, que viene complicada por la peculiar problemática de la teoría de la medición, de los errores, de las aproximaciones de valores, etc. Por otro lado, mi elección de ejemplos de teorías es evidentemente parcial y encaminada a llevar el agua a mi molino. Las tres teorías matemáticas que aquí he presentado como ejemplo —la teoría de grupos, la teoría de espacios vectoriales y la teoría de la probabilidad—- son teorías polimorfas, es decir, susceptibles de modelos no isomorfos entre sí. Muy distinto sería el caso de las teorías categóricas (al menos en la intención), tales como la aritmética, el análisis y la teoría de conjuntos. Igualmente he puesto como ejemplo de teoría física una teoría "determinista" ———la mecánica clásica de partículas. Mucho más problemática resultaría la comparación con teorías físicas de tipo estadístico. Y, desde luego, ni pretendo que la presente interpretación de las teorías físicas corresponda a las intenciones de Sneed ni yo mismo pondría la mano en el fuego por ella. Sobre la pesca Una teoría física que ya ha encontrado aplicaciones —al igual que una teoría matemática consistente— no puede ser refutada por la experiencia. Pero puede sufrir la competencia de otra teoría nueva que explique las mismas situaciones o sistemas de un modo más simple, o que explique todos los sistemas que la primera explicaba 2/2

— e e A A A A A Fo o A ——_ et tt tl la —_ o A A NT A
más otros nuevos que ella no alcanzaba a explicar. Entonces puede ocurrir que la teoría entre en desuso y se pase de moda, que los textos en que se expone se cubran de polvo y no vuelvan a imprimirse ni estudiarse. Pero la teoría no habrá sido por ello falsificada. Una teoría física —como una teoría matemática— es el tipo de entidad que puede ser arrinconada, pero no refutada. Incluso puede ocurrir que la vieja teoría física sobreviva a la concurrencia de la nueva, a pesar de que haya fracasado en su intento de aplicarse a algunos sistemas que la segunda logra explicar. Es lo que ha pasado con la aparición de la teoría mecánica relativista y de la mecánica cuántica, que logran explicar situaciones en las que la teoría mecánica clásica ha fracasado. Algunos han doblado demasiado pronto las campanas por la muerte de la mecánica clásica. Suponiendo que ésta tenía un único modelo, el modelo cósmico, y constatando que en ciertas condiciones o parcelas del cosmos no se cumplía lo predicho por ella, han concluido que la mecánica clásica ha quedado refutada. Pero lo único que ha quedado refutado es la afirmación de que esas parcelas constituyen modelos de la teoría mecánica clásica. Esta teoría sigue teniendo multitud de modelos importantes y, puesto que en la mayoría de ellos es más sencilla de aplicar que la relativista, sigue gozando de excelente salud, incluso desde un punto de vista social. Somos como pescadores y nuestras teorías son como redes. Y no arrojamos de buen grado por la borda las redes con las que alguna vez hemos pescado por el mero hecho de que no sirvan para ciertos peces o en determinados mares. Pero continuamente inventamos y tejemos redes nuevas y distintas y las lanzamos al agua, para ver lo que pescamos con ellas. No despreciamos ninguna red y en ninguna conflamos excesivamente, aunque preferimos cargar el barco con las redes más eficaces y dejar en el puerto las de menos uso. Y así vamos navegando, renovando continuamente nuestro arsenal de redes en función de las incidencias de la pesca. 2/3

CAPÍTULO 12 EL MUNDO SE NOS ESCURRE ENTRE LAS MALLAS DE NUESTRAS TEORÍAS

Teorías axiomáticas

Cuando dirigimos nuestra atención a un sistema determinado de la realidad y reunimos datos, observaciones o hipótesis plausibles acerca del mismo, contribuimos a elaborar su historia. La elaboración de la historia de un sistema es un proceso laborioso e inalcanzable. De ahí que nos aparezca tan atractiva la posibilidad de axiomatizar esa historia (o parte de ella), de tomar el atajo de la teoría, reduciendo la infinita e inabarcable masa de los datos posíbles a unos cuantos principios que los resuman y subsuman. Axiomatizar de verdad es difícil: se requiere que todos los conceptos que empleamos en la historia del sistema sean definibles a partir de unos pocos conceptos primitivos y que todas las proposiciones sobre el sistema que aceptamos como verdaderas sean implicadas por unos pocos principios, los axiomas, formulados con ayuda de los conceptos primitivos. Muchas presuntas axiomatizaciones no son tales. Es preciso suplementar los axiomas con la intuición, la observación o nuestros saberes previos para poder obtener las proposiciones verdaderas que nos interesan. Pero si la axiomatización es correcta, entonces las proposiciones de la historia del sistema elaborada hasta entonces quedan subsuZO

A A A A midas bajo los axiomas, como meras consecuencias suyas. Con esto habremos llegado a una historia axiomática o, si se prefiere, a una teoría concreta. Cuando ello ocurre, las proposiciones de esa historia se derivan de los axiomas simplemente por la forma lógica de unas y otros y sin que Importe para nada el contenido concreto de los conceptos empleados en su formulación. De hecho ese contenido podría variar, sin que variase para nada esa relación de consecuencia. Incluso podríamos sustituir las palabras o términos concretos empleados en su formulación por letras o parámetros, podríamos sustituir los conceptos (con contenido determinado) por conceptores (sin contenido determinado). Con esto habríamos alcanzado el estadio de la teoría abstracta y, más allá del sistema cuya historia nos había servido de punto de partida, habríamos caracterizado una determinada estructura, estructura incorporada en el sistema de partida, pero también en innumerables otros sistemas distintos. Konrad Lorenz ha escrito: «En la evolución de los órganos e incluso en el desarrollo técnico de las máquinas ocurre con frecuencia que un aparato, que fue desarrollado para obtener un cierto resultado, se muestra luego inesperadamente capaz de desempeñar otras funciones completamente distintas a a para la que fue desarrollado» *. Una teoría no es un órgano ni una máquina, pero sí es un instrumento, y como tal comparte el destino aquí señalado por Lorenz. Las teorías las hacemos para algo. Son instrumentos. Pero esos instrumentos resultan luego útiles para otras cosas no previstas. Una teoría no sólo sirve para describir el sistema en que pensábamos al construirla, sino también para describir otros muchos sistemas en los que nunca habíamos pensado. Así, por el teorema de Lówenheim-Skolem sabemos que siempre que logremos construir una teoría abstracta que describa un sistema del tipo que sea (y que, por tanto, sea consistente), esa misma teoría estará describiendo también ciertos sistemas de números naturales. ' Konrad Lorenz: Die Riickseite des Spiegels. Versuch einer Naturgeschicbte menschlichen Erkennens, R. Piper Verlag, Múnich, 1973, p. 161. 276

EL MUNDO SE NOS ESCURRE ENTRE LAS MALLAS DE NUESTRAS TEORÍAS A A PP. -—_—_ _ A A NN IAN AA AA a A. ll ai Teoría de la progenitura Todas las relaciones de parentesco biológico son reducibles a la progenitura, es decir, a la relación en que está un animal x con otro y cuando xes progenitor de y, es decir, cuando x es padre o madre de y. Así, por ejemplo, que xes abuelo (o abuela) de y significa que x es progenitor de un progenitor de y. Que x es hermano (o hermana) de y significa que alguien es progenitor tanto de x como de y y que x4 y. Que x.es tío de y significa que x es hermano de un progenitor de y. De igual modo podrían definirse el resto de las relaciones de parentesco biológico. Si nos interesamos por ellas, es natural que nuestro interés se concentre en la relación de progenitura. Supongamos que queremos hacer una teoría abstracta de esa relación, una teoría de la progenitura. Como axiomas podríamos elegir ciertas notas intuitivamente claras de la misma, Por ejemplo, que nadie es progenitor de sí mismo; que si x es progenitor de y, entonces no puede ser que y sea progenitor de 1; o que todo animal tiene exactamente dos progenitores (su padre y su madre), no más ni menos. Llamemos sistema de progenitura a cualquier sistema formado por un dominio no vacío de objetos (como humanes, o gaviotas, o insectos) y una relación binaria P que cumple las indicadas condiciones. Def. =yPx) (3) Vxe AdyzcA (y za yPx na zPx a Vue AluPx= > u=yV u4 =2)) Hemos construido esta trivial teoría pensando en los sistemas de progenitura entre animales. Pero, una vez construida, nos damos cuenta de que tiene también modelos en los que no habíamos pensado en absoluto, como por ejemplo el sistema (4, P, 277

donde Z es el conjunto de los números enteros y Pes la relación en que está un número entero con otro cuando el primero es una o tres unidades mayor que el segundo, es decir, P = l(xyellx = y + 1 Vx = y + 3) Como fácilmente se aprecia, (4, P > cumple todos los axiomas de nuestra teoría de la progenitura, es un modelo de esa teoría, es un sistema de progeniítura. En efecto, Z + (9, PC Lx £ por definición, Pes una relación evidentemente irreflexiva y asimétrica y, además, para cada número entero x hay otros dos números distintos (a saber, x + 1 y x + 3) tales que ambos están en la relación P con x y que cualquier otro número que esté en la relación Pcon x será uno de esos dos. | Si reflexionamos un poco más, enseguida nos percatamos de que así como este sistema (en que no habíamos pensado al conscruir la teoría) es un modelo indudable de la teoría, el sistema que habíamos tenido ¿n mente al construirla, el sistema a cuya medida la habíamos construido, es decir, el sistema formado por los humanes (o cualquier otro tipo de animales) y la relación de progenitura entre ellos, a la postre no es un modelo de la teoría, no es un «sistema de progenitura» en el sentido por ella definido. En efecto, el axioma (3), interpretado sobre un sistema de animales, presupone una serie infinita o circular de antepasados, lo cual no es el caso con los humanes, ni con los animales en general. Desde el surgimiento de la vida sólo ha habido un número finito de generaciones, y nadie es antepasado de sí mismo. Con esto nos encontramos en la paradójica situación de que el sistema empírico pragmáticamente propuesto desde el principio como modelo para la teoría resulta no ser modelo de la misma, mientras que el inesperado e impensado sistema numérico sí que lo es. Si una teoría abstracta es consistente, de lo único que podemos estar seguros es de que tiene modelos numéricos, y esos modelos son los únicos seguros. El que, además, tenga modelos empíricos es algo de lo que, en general, no podemos estar seguros. 278

EL MUNDO SE NOS ESCURRE ENTRE LAS MALLAS DE NUESTRAS TEORÍAS A A A A A A A A e e —— A A A A A a A e ll NT A e A Un caso parecido al de la progenitura es el de ciertas teorías del tiempo, que carecen de modelos empíricos cuando se las proyecta hacia atrás. Yendo hacia atrás, llega un momento en que fallan los teoremas de representación de la metrización. Ya no hay relojes, ya no hay sol ni planetas, ya no hay átomos de cesio vibrando... La teoría abstracta y sus modelos matemáticos quedan, pero el mundo físico, empírico, se nos escurre entre los dedos, entre las mallas de nuestra teoría. Mecánica clásica de partículas No se piense que la extraña situación descrita es peculiar de teorías tan artificiosas y ad hoc como la mencionada teoría de la progenitura. Lo mismo ocurre con todas las teorías famosas de la física. Consideremos la más sencilla de todas, la mecánica clásica de partículas. Como bien es sabido, hoy disponemos de varias axiomatizaciones de la misma, empezando por la presentada en 1953 por J. Mckinsey, A. Sugar y P. Suppes?. Para las consideraciones que aquí estamos haciendo resulta irrelevante cuál de ellas escojamos. Consideremos, por ejemplo, la ofrecida por P. Suppes? en 1957. Los siguientes axiomas (1) a (9) definen la estructura mecánica newtoniana de partículas, poseída por todos los sistemas que los satisfacen. La teoría mecánica newtoniana de partículas (la general, previa a sus especializaciones) puede considerarse como el conjunto de las consecuencias de estos axiomas. He aquí la axlomatización: Un sistema $< 27 , 5, M, f g)$ es un sistema mecánico newtoniano de partículas si y solo st: 2 J, McKinsey, A. Sugar y P Suppes: «Axiomatic Foundations of Classical Mechanics», Journal of Rational Mechanics and Analysis, vol. 2 (1953). (Ed. cast.: Fundamentos axtomáticos para la mecánica de particulas clásica, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, México, 1978.) 5 Patrick Suppes: Introduciion to Logic, Van Nostrand Co., Nueva York, 1957, pp. 291-304. 279

Además, para cada pe Py t€ T, íp, 1) es 2 veces diferenciable en 2, es decir Déslp, £) existe: (4) nm. PR" (5) FPxXPx TR? (6) 2 PxT—— = >R? (7) Vpe PY te EZ fo q D + glp 2) = mp) Disp, y (8) Vpge PV ie TE fp q, 0 = - Kg, p 1) (9) VogePYteT.spIO fp gd = —a 00 fa p 1 Los axiomas (1) a (3) son los axiomas cinéticos. El axioma (1) exige que Psea una clase finita y no vacía (intuitivamente, de "partículas"); (2) dice que 7'es un intervalo de números reales (de tiempo"); (3) exige que s (ntuitivamente, la posición en el espacio") sea una función que a cada "partícula de Py cada "instante" de T asigne univocamente un vector 3-dimensional, y que esta función sea dos veces diferenciable (para que la aceleración, definida como la segunda derivada de la posición respecto al tiempo, esté siempre definida). Los axiomas (4) a (9) son axiomas dinámicos; (4) pide que 2 (intuitivamente, la masa") sea una función que a cada partícula asigne un número real positivo (recuérdese que en la mecánica clásica no hay masas nulas). Hablando intuitivamente y pensando en los modelos propuestos, podemos decir (interpretando) que (5) caracteriza a fcomo las fuerzas internas que unas partículas del sistema ejercen sobre otras, es decir, como la función que a cada par de partículas y a cada instante asigna el vector-fuerza correspondiente a la fuerza que sobre la primera partícula ejerce la segunda en ese instante, y que (6) caracteriza a g como la resultante de las fuerzas externas, es decir, como la función que a cada partícula y a cada instante asigna el vector-fuerza correspondiente a la resultante de todas las fuerzas externas que actúan sobre esa 280

_ ÉL MUNDO SE NOS ESCURRE ENTRE LAS MALLAS DE NUESTRAS TEORÍAS A KO a A A A —_ A KAAA_KÁKÁK

A e Mt A los de algún tipo, tiene también modelos numéricos. De hecho los únicos modelos seguros de la mecánica newtoniana de partículas son sus modelos numéricos, y hay una infinidad de ellos. Claro está que los físicos jamás piensan en los modelos meramente numéricos de sus teorías y que algunos incluso pueden tomar la mención de su existencia como una especie de chiste. Pero una cosa son las relaciones pragmáticas de los físicos con sus teorías (en qué piensan los físicos cuando las construyen, qué aplicaciones de las mismas proponen o les interesan, etc.) y otra distinta son las relaciones semánticas o matemáticas de las teorías con los sistemas que las satisfacen, con sus modelos, que son independientes de los pensamientos, intereses, propuestas y sentido del humor de los físicos. Una cosa es en quién pensaba yo (y con cuánto amor pensaba) cuando compré aquel par de zapatos, y otra cosa distinta (e independiente de mí) es la relación de ajuste que hay entre ese par de zapatos y todos los pies de los humanes (incluidos aquellos en los que yo nunca había pensado ni iba a pensar en el futuro). Hay una infinidad de modelos numéricos de la mecánica de partículas (en su axiomatización por P. Suppes antes presentada, aunque lo mismo ocurriría con cualquier otra). He aquí uno especialmente simple y trivial. Sea MM = XL Ls, m, f g> el sistema numérico definido del siguiente medo: P = (11 T = ixeR|0 < 0, 0, 0) para cada te T Es decir, P es el singlerón o clase unitaria cuyo Único elemento es el número 1 (el número 1 es la única partícula en este sistema). T'es el intervalo cerrado de los números reales entre O y 1. La función s asigna a cada par formado por el 1 (la única partícula) y £ 282

EL MUNDO SE NOS ESCURRE ENTRE LAS MALLAS DE NUESTRAS TEORÍAS A A A A A A A A A A A AAA a o A A A A A e E ll a E 0 (para cualquier número real te 7) el vector . Este sistema numérico AL no constituye una aplicación propuesta de la mecánica newtoniana de partículas. Sin embargo, es un modelo de esa teoría, es un sistema mecánico newtoniano de vacío. Cumple (2), pues 7 es un intervalo de KR. Cumple (3), pues s: PXT RR y x(p, 1), es decir, (1, 1) es 2 veces diferenciable en £, En efecto D*x1, £) = <0, 0, 0) para cualquier £. Los axiomas (4), (5) y (6) quedan trivialmente satisfechos por la definición de m, fy g, respectivamente. También se cumple el axioma (7). En efecto, para cualquier pe P (es decir, para 1) y para cualquier te Tr 2 Hb q D+ glp,)=2 A, 4 Dre, 0 ge qe =1,1,9+41,0 = (0, 0, 0>+<0, 0, 0> = 40, 0, 0) = 1:(0,0, 0> =H 1) DES, 1) =m(p) Désp, 1) Igualmente se cumple el axioma (8), pues lp, q,) = <0, 0, 0) = —<0, 0, 0> = Ag, p, E). Y también, finalmente, se cumple el axioma (9), ya que para cualesquiera p, qe Pyr€ 1: p DO f? q 0=<1,£t)89<0, 0, 0) = 0,0, 0) =<0,0, 0769 <5 5 t) =-— == (q, DCI AG, p, £) 283

 Mal a e e A A A e e A A A a e A a e e e e e e o e a A A Por tanto, el sistema numérico 4 es un modelo indudable (aunque no propuesto y físicamente irrelevante) de la teoría mecánica newtoniana de partículas. Lo que pasa con la mecánica newtoniana de partículas pasa también con cualquier otra teoría física. Si una teoría física tiene un modelo físico 4, entonces, y por lo pronto, cualquier sistema isomorto con 4% será también un modelo de la teoría. Y siempre hay sistemas numéricos isomorfos con cualquier sistema empírlco dado. Supongamos, para considerar el caso más simple de todos, que 4 = (MA(Sj.. ,), donde M es una clase no vacía de objetos físicos y ($3, ,es un conjunto indexado de relaciones físicas entre esos objetos. Sea la cardinalidad de M (la cantidad de objetos que hay en M), por ejemplo, k, es decir, |M] = k. Aquí kes un número cardinal, identificable con el conjunto Kde todos los números menores que él, menores que £. En cualquier caso, la cardinalidad de Kes £, y M-K, es decir, hay una biyección fde Men K. Para cada relación física $, (supongamos que es -aria) en M definimos una relación numérica X, en K del siguiente modo: R.= (e Km ...m dE S) Entonces ocurre que para cualquier relación física n-aría $, existe una relación numérica KR, tal que para cada E KAR) Y puesto que todo sistema isomorfo a un modelo de la teoría es también un modelo de esa teoría, el sistema numérico % es un modelo de la teoría física de que partimos. 284

....2L MUNDO SE NOS ESCURRE ENTRE LAS MALLAS DE NUESTRAS TEORÍAS — Naturalmente, hay más modelos numéricos de una teoría dada que los isomorfos con un modelo empírico dado. En el caso de las teorías de primer orden, todos los sistemas elementalmente equivalentes (es decir, que satisfacen las mismas fórmulas de primer orden) a un modelo dado son también modelos de la teoría, aunque no sean isomorfos al modelo dado. (Nótese que la noción de equivalencia elemental es menos exigente que la de isomorfía: todos los sistemas isomorfos son elementalmente equivalentes, pero no a la inversa.) Pero no sólo es eso. Como Skolem, Gódel y Henkin han probado, toda teoría consistente tiene modelos numéricos. Es imposible hablar teóricamente de algo sin estar hablando al mismo tiempo (y aun sin quererlo) de números naturales y de conjuntos de números naturales. Ontología bungiana Mario Bunge tiene la fuerte intuición de que los individuos concretos, materiales, que componen el mundo real son algo muy distinto e incomparablemente más jugoso que las abstrusas y cuasifantasmagóricas entidades matemáticas. Hasta aquí muchos compartimos su intuición. Pero él parece creer que esta diferencia es captable de un modo preciso y formal, teórico. Y esto ya es más problemático. Bunge dedica el capítulo 1 de su tratado de ontología* a describir formalmente la estructura del mundo real de los individuos concretos. Bunge habla como si creyera que existe un mundo único, unívocamente dividido en individuos concretos sustanciales, Incluso se pregunta por la cardinalidad de ese mundo, sin más". Habla como si ser individuo concreto o no, simple o compuesto, etc., estuviera ya determinado con independencia de nosotros. Pero él sólo lo determina mediante las condiciones sobre los conceptores $, o y Ll, 1 Mario Bunge: Treatise on Basic Philosophy vol. 3, Ontology £ D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1977. > Ibídem, p. 43. 285

 que explicita, y que de hecho resultan ser satisfechas por cualquier álgebra de Boole completa y en especial por cualquier álgebra de Boole de partes de un conjunto dado. Para cualquier conjunto 4, si interpretamos 3 como PA (es decir, como el conjunto de las partes de 4), L] como (4 (el conjunto vacío) y o como U (la unión), todos los axiomas con que Bunge caracteriza los individuos concretos se cumplen. En especial resulta que un individuo simple es un singletón o 50, un individuo compuesto es uno que no es simple; x E y deviene x< y El, el mundo de Bunge, resulta ser simplemente .4; que xes mundano significa que x< 4; la composición de x, G(x), deviene el conjunto de las partes de x, P(x); etc. Una interpretación de este tipo (donde A es el conjunto que queramos) satisface siempre todas las condiciones formales exigidas por Bunge, como fácilmente puede comprobarse pasando revista a todas las exigencias del capítulo de su libro citado, que, por otro lado, contiene la exposición más detallada y precisa de toda su obra de su intento de axiomatizar la noción intuitiva de individuo concreto. Podemos tomar como Á, como mundo, el conjunto [2, 3) formado por los números naturales 2 y 3, o el conjunto de los números primos, o el de las funciones reales no diferenciables o cualquier otro conjunto matemático (que es lo que Bunge quiere excluir). A pesar de ello, todas las exigencias formales quedarán cumplidas. Ese conjunto matemático será el mundo y ciertos subconjuntos suyos serán los «individuos sustanciales» de Bunge, con lo que su intento de caracterizar formalmente la diferencia entre los individuos, sistemas o mundos físicos, concretos, materiales, sustanciales, por un lado, y los matemáticos, ficcionales o constructos, por otro, se habrá ido al agua. Si Bunge fracasa en su intento de dar una base axiomática formal a su intuición, ello no se debe tanto a una presunta falta de habilidad técnica por su parte como a una incapacidad intrínseca del método axiomático formal para caracterizar univocamente sistemas reales. Esto es lo grave del asunto, y grave no sólo para Bunge, sino para todos, que nos quedamos un poco melancólicos

A A _———_—_ PA A A e A AAA KÁK

 Uno puede desarrollar una teoría sin saber si tiene modelos no matemáticos. Uno puede definir y estudiar una estructura sin saber sí se instancia en sistemas reales. Así, por ejemplo, y también en el contexto de la teoría general de la relatividad, se ha desarrollado desde hace varios años una precisa teoría de los agujeros negros, singularidades del espaciotiempo en las que el total colapso gravitatorio impide por principio la emisión de señales (fotones) cualesquiera, pues incluso éstas son absorbidas sin resto. Sabemos que la teoría de los agujeros negros es compatible con la teoría general de la relatividad. Sabemos que posee modelos matemáticos, pero no estamos seguros de si hay agujeros negros “de verdad”, sistemas físicos que sean modelos de la teoría. La observación de estrellas que se mueven como componentes de sistemas binarios, pero cuyas compañeras no se vislumbran, así como la detección de chorros de rayos X y ganuma procedentes de la materia que se precipita hacia el centro de ciertos discos de acreción, inducen a inferir la existencia de agujeros negros. Á pesar de esos indicios, aún no podemos estar seguros de que existan modelos físicos (que son los propuestos) de la teoría de agujeros negros, aunque sí podemos estarlo de que existen modelos matemáticos, Las diversas teorías económicas clásicas, marxistas, marginalistas, neoclásicas, etc., describen ciertas estructuras de mercado con más o menos precisión. Pero no está nada claro que ninguna de ellas tenga modelos reales, que realmente describa la estructura del mercado en que vivimos. Y recientemente notaba Fishburn (uno de los creadores de la teoría de la decisión) que las escasas investigaciones empíricas realizadas hasta el momento más bien indican que el comportamiento real de la gente, a la hora de tomar declsiones, no coincide con lo descrito por ninguna de las teorías de la decisión propuestas hasta ahora y a las que, por tanto, más bien habría que atribuir valor normativo. Las teorías de la decisión son de una rara precisión y, desde luego, poseen modelos matemáticos. Pero parece sumamente problemático que posean modelos reales, Un instrumento no se refiere a nada, El cuchillo no se refiere a la carne, aunque sea con intención de cortarla como lo he compra288

—..EL MUNDO SE NOS ESCURRE ENTRE LAS MALLAS DE NUESTRAS TEORÍAS do o fabricado. De hecho el cuchillo puede servir para cortar, modelar, hendir, etc., multitud de cosas distintas e imprevisibles. La bacía servía en principio para colocarla alrededor del cuello, mientras el barbero afeitaba a alguien, pero Don Quijote se la puso en la cabeza, la usó como yelmo (el yelmo de Membrino). Las teorías abstractas son instrumentos que no se refieren a ningún sistema concreto. Las podemos construir pensando en un sistenía particular, a la medida de un sistema particular. Pero en cuanto las hemos definido, automáticamente y con independencia de nosotros entablan relaciones matemáticas imprevistas con una infinidad de sistemas (numéricos, empíricos y otros) insospechados. Nuestras teorías son como los trajes. Hacemos un traje a la medida de alguien, y luego resulta que ese mismo traje sirve también para muchos otros humanes. Es también un traje a la medida de otros, además de a la medida de la persona para la que lo bemos confeccionado. El zapato hecho o comprado para alguien conocido o querido también encaja en el pie de otros humanes. Sólo en los cuentos de hadas hay zapatos que únicamente sirven para una persona determinada, como el zapato perdido por la Cenicienta, que sólo ella podía calzar, que determinaba unfvocamente su pie. En la telaraña, en la red, en la trampa teórica que hemos tendido a nuestra presa buscada, caen siempre presas insospechadas. El constructor de teorías abstractas es como el aprendiz de brujo. Sabe para qué construye su teoría, con qué intención, para qué fin. Pero una vez construida, definida, la teoría se le escapa de las manos. 289

CAPÍTULO 13 BUNGE SOBRE INDIVIDUOS CONCRETOS

Que algo sea o no un individuo es en gran medida una cuestión convencional. El número 2 puede considerarse como un individuo (es la actitud estándar en teoría de números), o como un conjunto (en teoría de conjuntos), o como una propiedad de propiedades o propiedad de segundo orden (en Frege), etc. Yo no veo que tenga mucho sentido pretender que el número 2, en sí mismo, sea alguna de esas cosas, con exclusión de las demás. Una palabra determinada, por ejemplo “gato”, puede ser considerad* como un individuo (en lexicografía) o como una clase, esquema o propiedad de proferencias, etc. Todo individuo puede ser considerado (si se quiere) como una función O-aria, toda propiedad puede ser identificada con una función sobre [0, 1) y toda función n-aria como una relación 2 + l-aria, y a su vez toda relación, función o propiedad puede ser considerada (cuando resulta útil) como un individuo. Lógica y matemáticamente todo ello es posible e indiferente. Pragmáticamente depende del contexto y de nuestras intenciones el que una cierta manera de considerar las cosas sea más o menos conveniente que otra. En definitiva, un ¿n-dividuo es aquello que nosotros decidimos mo dividir con el escalpelo «de nuestro pensamiento. El mundo, por sí mismo, no está dividido de un modo unívoco con independencia de nuestra intervención. 27L

 Si la noción de individuo, en general, ya es suficientemente problemática, la cosa se complica aún más sí tratamos de caracter!zar exactamente, teóricamente, lo que sea un individuo concreto. Mario Bunge tiene la fuerte intuición (que yo comparto) de que el perro de su vecino es algo muy distinto del número pi. Al perro lo llama individuo concreto; al número pi, constructo. Está claro que los perros son muy distintos de los números reales. Pero, ¿a qué se parece más una partícula virtual, o un programa de computador, o un crédito bancario, al perro o al número real? No lo sé. Me temo que nuestras intuiciones al respecto sólo son claras en los casos EXtICImnos, En el tomo tercero de su Treatise on Basic Philosophy, Mario Bunge ' presentó una teoría ontológica que pretendía (entre otras cosas) caracterizar de un modo axiomático la noción de individuo concreto. Si su intento hubiera sido exitoso, dispondriíamos de un instrumento eficaz con el que superar la vaguedad de nuestras intuiciones sobre lo que sea un individuo concreto, Á mí me habría encantado que Bunge hubiera triunfado en su noble empeño, y que hubiera encontrado una caracterización teórica de la noción de individuo concreto que sólo fuese satisfecha por los (que Bunge considera) individuos concretos. Pero como mostré en mi artículo «El mundo se nos escurre entre las mallas de nuestras teorías» (capítulo 12 de este libro), ése no es el caso. La caracterización que da Bunge del conjunto de los individuos concretos es satisfecha por una infinidad de constructos que (según la intuición de Bunge) claramente no son individuos concretos. Ese fracaso no es casual, sino debido a una limitación intrínseca del método axiomático, relacionada con el teorema de Lówenheim-Skolem. Después de escribir mi artículo citado he comprobado que Hilary Putnam ha llegado independientemente a conclusiones muy parecidas en su artículo «Models and reality» *. En ' Mario Bunge: Treatise on Basic Philosophy, vo). 3, The Furniture oftbe Vióría, Reidel, Dordreche, 1977. 2 Reimpreso en Hilary Putnam: Realism and reason, Cambridge University Press, Cambridge, 1983. 292

_ BUNGE SOBRE INDIVIDUOS CONCRETOS ¡€_qIIA A dd RAEE especial Putnam hace hincapié en que las limitaciones del método axiomático (o teórico, o formal, o como se le quiera llamar) para caracterizar univocamente la realidad no pueden ser superadas mediante el añadido de restricciones operativas, hipótesis semánticas u otros expedientes similares, pues la teoría ampliada con todos esos añadidos está sometida a las mismas limitaciones que la teoría sin ampliar. Si a una caracterización teórica de los individuos concretos añado la coletilla «y además, con todo esto quiero referirme solamente a los individuos concretos», de poca ayuda me resultará, mientras siga sin saber cuáles son los individuos concretos. En un artículo publicado en Theoría y titulado «¿Qué es un individuo concreto?», Mario Bunge? me ha hecho el honor de replicar a mis observaciones sobre su teoría de los individuos concretos, pero no creo que haya conseguido solucionar sus difícultades, por lo que me permitiré hacer unas breves puntualizaciones. Me voy a ceñir al núcleo central de la cuestión, evitando toda disgresión o polémica lateral, en aras de la brevedad. En el capítulo 1 del tomo 3 del tratado de Bunge se trata de caracterizar axtomáticamente lo que es un individuo concreto (o sustancial, o material, que para Bunge es lo mismo), o, mejor dicho, el conjunto de todos los individuos concretos, junto con su composición, etc. Como se indica en mi artículo citado, todas las condiciones especificadas por Bunge son satisfechas por cualquier álgebra de Boole completa, y en especial por cualquier álgebra de Boole de partes de un conjunto cualquiera dado, la cual (según Bunge) siempre es un conjunto de constructos, no de individuos concretos. Por tanto, la caracterización no funciona (al menos no funciona como instrumento para separar individuos concretos de constructos). En el artículo de Bunge en Theoría, Bunge parece atribuir el problema a que nos quedamos en el capítulo 1 del tratado y no llegamos a los capítulos 2 y 3, donde está la solución, basada en la definición de las nociones de propiedad sustancial y de cosa concreta, Ojalá fuera así de simple. Por desgracia, esas ? Mario Bunge: «¿Qué es un individuo concreto?», Theoría, núm. 1, pp. 121 y ss. (1985). 293

_. CONCEPTOS Y TEORÍAS EN LA CIENCIA e — a
¿€q*EIAK«ádON

..BUNGE SOBRE INDIVIDUOS CONCRETOS HZ Ó—X XA A
A que nos presentan en clase de análisis matemático. De eso no le cabe ninguna duda a Mario Bunge. A mí tampoco. Por tanto, coincidimos en lo fundamental. Nuestra única posible discrepancla estriba en si, con los alfileres de su teoría, él ha logrado atrapar (caracterizar unívocamente) esa diferencia que ambos (que todos) intuitivamente captamos. Me temo que no, Hélas! 295

CAPÍTULO 14 ¿ESTÁ USTED A FAVOR O EN CONTRA DEL BIEN Y LA VERDAD? Preguntas capciosas Hay preguntas capciosas que, cuando se nos formulan, producen en nosotros un cierto embarazo y frustración, pues, respondamos como respondamos, siempre quedaremos mal, incluso ante nosotros mismos. Preferiríamos que no nos pusieran en el trance de tener que contestarlas. «¿Está usted a favor o en contra de la aida sexual?» Estar a favor de la normalidad sexual suena muy aburrido. Pero sí decimos que estamos en contra, parece que somos unos degenerados. «¿Está usted a favor o en contra del derecho a la vida?» Si decimos que estamos a favor del derecho a la vida, van a utilizar nuestra afirmación para colocarnos en el banco de los carcas, contrarios al derecho al aborto y la eutanasia. Si decimos que estamos en contra, vamos a resultar sospechosos de albergar peligrosos instintos asesinos. «¿Está usted a favor o en contra del bien y la verdad?» Si respondemos que estamos en contra del bien y la verdad, vamos a parecer monstruos, prodigios de perversidad teórica y práctica. Pero si.contestamos que estamos a favor del bien y de la verdad, vamos a presentarnos envueltos en un tufillo de beatería intelectual y ..moral simplista y bien pensante, que tampoco nos va. 297

CONCEPTOS Y TEORÍAS EN LA CIENCIA o NA A A o o A A a e A A A a a A A o o A A e o a a Lo capcioso de las preguntas y lo embarazoso de las respuestas viene de que en su formulación empleamos conceptos a la vez excesivamente vagos y excestvamente cargados de valoración y emnotividad. Yo no sé que es la normalidad sexual, el derecho a la vida, la verdad o el bien, sin más. En principio parecen apuntar hacia algo positivo y valioso; por eso no puedo decir que estoy en contra. Pero pueden precisarse de muchas maneras distintas, algunas de las cuales me resultan inaceptables; por eso no puedo decir que estoy a favor. Claro que tambien hay un método de quitar mordiente al asunto, a base de interpretar las preguntas de tal modo que las respuestas resulten ser tautológicas. Si por normalidad sexual entiendo hacer en la cama lo que a mí me gusta hacer en la cama, desde luego que estoy a favor. Si por derecho a la vida entiendo la preservación de la vída en todas las circunstancias en que la vida merezca la pena de ser conservada, todos estaremos a favor de tal derecho. Si por bien entendemos (con Aristóteles) aquello que deseamos, desde luego que deseamos el bien. Si el bien es lo que hay que hacer y el mal es lo que hay que evitar, poco nos costará estar de acuerdo con los filósofos medievales en que bonum est faciendum y malum est vitandum. Y sí, siguiendo la desencomilladora concepción tarskiana de la verdad, decir que algo es verdad equivale a repetirlo, entonces difícilmente estaremos en contra de decir que lo que decimos es verdad, es decir, de decir lo que (de todos modos) decimos. Esta estrategia inmunizadora elimina el desasosiego y confusión que nos producían las preguntas Iniciales, pero también les priva de todo interés o sentido. Si el gobierno somete a referéndum la pregunta de si queremos que nuestra sociedad sea justa, todos votaremos a favor, pero, aún así, el gobierno no sabrá qué hacer con tan unánime resultado. “Todos estamos de acuerdo en que la sociedad debería estar justamente organizada, pero discrepamos precisamente acerca de en qué consista la organización justa de la sociedad. Los que estaban en contra del justicialismo, en Argentina, no es que estuvieran en contra de la justicia; es que tenían una concepción de la justicia distinta de la del general 298

¿ESTÁ USTED A FAVOR O EN CONTRA DEL BIEN Y LA VERDAD? AR CARTE, e RÓS A A A TL Perón. Por eso decir, sin más, que estamos a favor de la sociedad justa no es más que decir que estamos a favor de lo que estamos a favor y, a todos los efectos prácticos, equivale a no decir nada, La naturaleza como libro Según una cierta concepción, el mundo, la realidad, la naturaleza, estarían estructurados de por sí de un modo unívoco y con independencia de observadores y habitantes. Según la expresión de Nelson Goodman, habría un ready-made world, un mundo ya listo, articulado y estructurado de por sí. Según Aristóteles, no pensamos en las cosas con conceptos o símbolos, sino que pensamos en las cosas con las cosas. Las cosas mismas en las que pensamos, o, más bien, sus formas, están también en nuestra cabeza, o mejor dicho, en nuestro corazón, en cualquier caso en nuestra alma. Las cosas mismas son lo que son en virtud de las formas que tienen. Y nuestra mente en ningún sentido construye o delimita o articula las cosas, sino que se limita a captar sus formas, a ser pasivamente informada por sus formas. Esas formas (que son independientes del humán, aunque puedan informar también su mente) están de por sí interrelacionadas y combinadas de ciertas maneras. Cuando nosotros las combinamos en nuestra mente como ellas están combinadas en la realidad, nuestro pensamiento (o su expresión en palabras, nuestro enunciado) es verdadero. Cuando las combinamos en nuestra mente de un modo distinto de como ellas están combinadas en la realidad, nuestro pensamiento es falso. En definitiva (aunque esto no lo dice Aristóteles) la falsedad es como un error de lectura, y la verdad es como la lectura correcta del mundo. A partir del siglo XvIl la ciencia moderna se pone en marcha, abandonando la jerga de las formas y empleando el lenguaje matemático. Pero la misma concepción de lectura del libro de la naturaleza sigue vigente. Sólo que ese libro está ahora escrito en lenguaje matemático. En /1 Saggitario (1623) escribe Galileo: «La

 filosofía está escrita en ese grandísimo libro que continuamente está abierto ante nuestros ojos (a saber, el universo), pero no puede entenderse si antes no se procura entender su lenguaje y conocer los caracteres en que está escrito. Este libro está escrito en lenguaje matemático, y sus caracteres son triángulos, círculos...». Para Galileo la naturaleza es un libro escrito en lenguaje matemático. Si los humanes no la habían entendido hasta entonces, ello se debía a que «no conocían los caracteres en que estaba escrita». Pero la naturaleza no es un libro ni está escrita en lenguaje alguno. Lo que —si se quiere— sí es un libro" es una teoría física, y ésta es la que puede estar escrita en lenguaje matemático. Sin embargo, la imagen del libro no muere tan fácilmente. El físico Paul Davies nos dice que la matemática es un lenguaje. Y añade: «Quizá el mayor descubrimiento de todos los tiempos es el de que la naturaleza está escrita en código matemático... Una vez que hemos descifrado el código para algún sistema físico particular, podernos leer la naturaleza como un libro» *. Pero cuando hacemos física no leemos la naturaleza como un libro, sino que escribimos un libro acerca de la naturaleza. Nuestro proceder es activo, no pasivo; somos escritores, no lectores. Y uno de los descubrimientos más importantes ha sido el de que los libros que sobre la naturaleza escribimos en lenguaje matemático son más exitosos que los demás. El lenguaje matemático se presta mejor a la descripción de la naturaleza que el cualitativo. Supongo que eso es lo que quiere decir Davies, y evidentemente en ello tiene razón. Pero no por eso resulta menos desafortunada la vieja metáfora del mundo como libro abierto que el científico se limita a leer. | El realista metafísico puede aceptar que los libros de física los escriben los físicos, y no la naturaleza. Pero pretende que el mundo es un sistema estructurado de por sí de tal modo que de alguna manera la naturaleza dicta al físico lo que éste tiene que escribir. Hay un isomorfismo entre el sistema conceptual del físico y el sistema de objetos, propiedades y relaciones en que consiste la

' Paul Davies: Superforce, Simon and Schuster, Nueva York, 1984, p. 51.

ATAN ANITA A A A II A A A A A AA A AN PON A CN PECAR CAC ct naturaleza. Y los teoremas del científico son verdaderos si corresponden (isomórficamente) a los hechos de ese sistema natural. La teoría total El perfecto realista metafísico ya sabe en qué consiste la verdad total: en la teoría total verdadera, que es isomorfa al mundo entero y describe el mundo tal y como éste es de por sí, Esta teoría total verdadera es el objetivo y el límite al que tiende la ciencia. Popper siempre habla de la ciencia como aproximación a la verdad, y esa misma expresión ——science as approximation to truth— fue usada por Putnam como título de la introducción al primer volumen de sus Philosophical Papers. De hecho, muchos filósofos —tanto positivistas como realistas— han concebido la ciencia (actual o ideal) como una teoría unificada y tendencialmente total, una teoría que abarque el mundo entero, o al menos que abarque el mundo en toda la medida en que el mundo de algún modo nos afecta. Yo, personalmente, no entiendo qué pueda ser esa presunta teoría total que se identificaría con toda la ciencia, la ciencia unificada, y que reflejaría perfectamente todo el mundo. Por un lado, si el mundo no tiene una estructura independiente unívoca —como no la tiene—, no entiendo qué podría significar que una teoría reflejase perfectamente (es decir, univocamente) esa estructura. Por otro lado, la ciencia es un complejísimo entramado de actividades sociales, en el que las teorías juegan un papel importante, pero no exclusivo. Las habilidades (por ejemplo, el ser capaces de diseñar experimentos o de programar computadores), los datos (por ejemplo, las fotos que constantemente se toman desde satélites, bajo telescopios y en cámaras de burbujas) y otras muchas cosas juegan un papel igualmente importante. En historia (sin duda una parte de la ciencia) los datos representados por los documentos y las habilidades de editar, traducir e interpretar dichos documentos juegan un papel más importante que las teorías. En 501

ll 2 Le 08 cualquier caso, no se ve por ningún lado un atísbo de teoría Única, sino múltiples teorías distintas. Sin embargo, a veces se piensa que la teoría única, total, definitiva y verdadera está a la vuelta de la esquina. En el siglo XIX se llegó a pensar que una combinación de la teoría mecánica de Newcon con la teoría electromagnética de Maxwell podría explicarlo todo. Los descubrimientos de comienzos de nuestro siglo arruinaron esa expectativa. Pero ahora vuelve a retoñar. Actualmente estamos viviendo unos momentos de gran excitación en la comunidad física. La construcción de teorías unificadas de fenómenos aparentemente dispersos constituye sin duda una meta deseable y deseada de la actividad teórica. Newton unificó la mecánica terrestre y la celeste en su teoría de la gravitación. Maxwell unificó en una sola teoría el tratamiento de la electricidad y el magnetismo, que pasaron a ser considerados como una sola fuerza: el elecrromagnetismo. Ahora pensamos que todas las fuerzas descritas por la física pueden reducirse a 4: la interacción nuclear fuerte, el elecrromagnetismo, la interacción nuclear débil y la gravitación. Glashow, Weinberg y Salam han logrado construir una teoría unificada del electromagnetismo y la fuerza nuclear débil (por la que recibieron el premio Nobel de Física de 1979). Esta teoría electrodébil predice la existencia de unas partículas mediadoras (los bosones W, W y Z que fueron detectadas experimentalmente en el CERN en 1983 (por lo cual Carlo Rubbia y $. van der Meer recibieron el premio Nobel de Física de 1984). La teoría que trata de la interacción nuclear fuerte se llama la cromodinámica cuántica. Actualmente se están elaborando varias teorías unificadas que tratan de combinar la cromodinámica cuántica con la teoría electrodébil. A estas teorías se las conoce como grand unified theories (GU). Finalmente hay varios intentos de construir una teoría que abarque las cuatro fuerzas, incluyendo la gravitación, y que combine la relatividad general con la mecánica cuántica, cuantizando la gravitación misma. Uno de estos intentos (la llamada teoría de las supercuerdas) ofrece ciertas esperanzas de cuajar, Y esas esperanzas son las que provocan la excitación de la comunidad científica. 302

A A A WA A AA A A A A A A A A A AA A A A AA AAA A A AAA AE x E€qPt[joÉeA AAA A A A A Á — HHH > 224 + < ÁS Adelantando acontecimientos, Paul Davies ha escrito: «Por primera vez en la historia tenemos una teoría científica racional de toda existencia... todos los fenómenos naturales pueden ser ahora abarcados en un esquema descriptivo único... Por primera vez en la historia tenemos a nuestro alcance una teoría científica completa del universo entero en la cual ningún objeto o sistema físico se queda fuera de un pequeño conjunto de principios científicos básicos» ?. Algunas personas consideran a Stephen Hawking como el más grande físico teórico viviente. En 1980 tomó posesión de su cátedra lucasiana en la Universidad de Cambridge con una conferencia titulada precisamente: «¿Está a la vísta el final de la física teórica?». En ella manifestaba su esperanza de que en los próximos años se llegase a la teoría unificada final (basada en supergravedad N' = 8), con lo que la física teórica estaría prácticamente concluida y los físicos teóricos tendrían que cambiar de empleo. De todos modos ----1os advierte Hawking—, «Incluso si logramos obtener una teoría unificada completa, no seremos capaces de hacer predicciones detalladas excepto en las situaciones más simples. Por ejemplo, ya conocemos las leyes físicas que gobiernan cuanto experimentamos en la vida corriente. Como Dirac señaló, su ecuación es la base de casi toda la física y la química. Sin embargo, sólo hemos sido capaces de resol. ver la ecuación para el más simple de los sistemas, el átomo de hidrógeno compuesto de un protón y un electrón...?», En resumen, incluso si se obtiene la gran teoría superunificada, seguirán haciendo falta todo tipo de otras teorías químicas, biológicas..., e incluso físicas (y no digamos económicas, lingiiísticas, etc.). La evolución de Putnam El realista metafísico atribuye con frecuencia al mundo propiedades o características de la teoría, lo cual para él no es grave, pues 2 Paul Davies: Superforce, pp. 5, 6 y 10. 3 Stephen Hawking: «Is the End of Theoretical Physics in Sight?», reimpreso en]. Boslough: Beyond + be Black Hole. Stepben Hawkings Universe, Collins, Londres, 1985, pp. 109 y ss. 303

_u dec la lb EE AA AAA piensa que entre ambos reina un perfecto isomorfismo. Ya vimos que incluso confunde a veces el mundo con un libro. La evolución de Putnam recuerda a la de Wittgensteln. Así como el segundo Wittgenstein dedicó lo más granado de su esfuerzo intelectual a refutar al primer Wittgenstein, así también el segundo Purnam (posterior a 1976 y anti-realista-metafísico) ha dedicado gran parte de su obra a combatir las posiciones (realistas metafísicas) que él mismo previamente había sostenido. De todos modos, no siempre queda claro qué tesis concretas del primer Putnam siguen siendo sostenidas por el segundo Putnam y cuáles no. Como es bien sabido, en el siglo XIX se desarrollaron diversas geometrías no euclídeas, tan legítimas desde un punto de vista matemático como la euclídea, y consistentes si ésta es consistente, según probaron Hilbert y otros. Una teoría física puede construltse como una extensión de una teoría geométrica, es decir, puede superponerse a ella y usarla. La teoría einsteiniana de la gravitación (la llamada relatividad general) no puede usar la geometría euclídea, sino que usa una geometría no euclídea, la de Riemann. Es decir, si el conceptor euclídeo de recta es interpretado como geodésica del espacio físico relativista, entonces los axiones de la geometría euclídea no son válidos (en esa interpretación). La geometría euclídea, interpretada como teoría del espacio físico, es incompatible con la relatividad general. Pero sigue siendo compatible con otras muchas teorías físicas, incluyendo la mecánica clásica, la relatividad especial y la mecánica cuántica. Y, en cualquier caso, como teoría matemática que es, no se ve afectada por la validez o invalidez de sus diversas interpretaciones mientras tenga al menos un modelo (como lo tiene, ¡R?), y por tanto infinitos modelos. Putnam se ha rasgado las edil en diversas ocasiones ante esta manera estándar de enfocar el tema. Pensaba que la geometría euclídea es una teoría del espacio físico, y que el éxito de la relatrvidad general implica la falsedad de la geometría euclídea. En defi nitiva, el mundo tiene una (y una sola) geometría, y ésa es la de 304

¿ESTÁ USTED A FAVOR O EN CONTRA DEL BIEN Y LA VERDAD? A a a PMI A—Á Riemann. «La geometría euclídea es falsa» *, «la geometría euclídea ha sido derrocada» ?, la geometría euclídea no es la geometría del mundo. Á mí me parece muy extraña esta idea de Putnam de que el mundo tiene una geometría propia. Está claro que, al describir y estudiar científicamente el espacio físico, echamos mano de diversas teorías físicas basadas en diversas geometrías. Pero los que tenemos geometrías somos nosotros, no el mundo. Putnam dice también que el mundo tiene 4 dimensiones, pensando en el espaciotiempo relativista. Pero Kaluza postulaba una cuarta dimensión del espacio físico (y por tanto un espaciotiempo de 5 dimensiones) e interpretaba el electromagnetismo como una especie de curvatura o alabeo de esa quinta dimensión, de igual modo que Einstein había interpretado la gravedad en las otras dimensiones espaciales. Actualmente bay un gran interés entre los físicos teóricos por las nuevas teorías de tipo Kaluza-Klein, que geometrizan las 4 fuerzas fundamentales a base de postular un espacio-tiempo de 11 dimensiones. Y hay quien piensa que a una escala suficientemente pequeña el espacio tiene una estructura rarísima como de espuma. Evidentemente disponemos de muchas geometrías (euclídeas y no euclídeas, de 3, de 4 y de 11 dimensiones, o infinitodimensionales) y quizá inventemos otras (espumosas, por ejemplo). “Todas estas geometrías son instrumentos útiles o inútiles para la resolución de múltiples problemas físicos u otros. Y no está claro que una de ellas sea el instrumento óptimo para resolver todos los problemas. Cada geometría (consistente) define y describe una estructura abstracta. Hasta qué punto esa estructura abstracta se incardine en ciertas aplicaciones empíricas es un problema empírico que no afecta a la geometría matemática. En cualquier caso, somos nosotros los que fabricamos y tenemos geometrías de diverso tipo y dimensión. í Hilary Putnam: Mathematics, Matter and Method, Cambridge University Press, 1975, p. 78. 7 Hilery Putnam: Meaning and the Moral Sciences, Routiedge £ Kegan Paul, Londres, 1979, p. 92, 305

CONCEPTOS Y TEORÍAS EN LA CIENCIA A AA A Toda teoría incorpora una lógica, que determina qué consecuencias se siguen de sus axiomas. Naturalmente nosotros hemos fabricado y disponemos de numerosas lógicas distintas, clásicas y no clásicas, bivalentes y polivalentes, etc. Hace unos años Putnam pretendía relnterpretar o reconstruir la mecánica cuántica, basándola en una lógica reticular ortomodular no estándar, inicialmente propuesta por von Neumann, El intento tuvo escasa aceptación, aunque es interesante en sí mismo. Lo que me parece que no es de recibo es que Putnam pretendiera que tal lógica no era simplemente la lógica de la mecánica cuántica reconstruida por Putnam, sino que era nada menos que la lógica del mundo. | Putnam hablaba de «la actual lógica del mundo» *, decía que «vivimos en un mundo con una lógica no clásica» * y que «la lógica booleana es falsa»*. La lógica booleana es la clásica. Por tanto, la lógica clásica sería falsa. Así, como suena. En efecto, sólo hay una lógica verdadera, la lógica del mundo, que es la lógica cuántica. «Para imaginar un mundo con lógica cuántica, imagina las experiencias que tendrías en tal mundo. (Estás viviendo en uno.)»” Putnam hablaba incluso de algo tan incomprensible como «la cardinalidad del mundo» '". ¿Qué diantres puede ser la cardinalidad de mundo, o incluso la cardinalidad de este cuarto? ¿Cuántas cosas hay en este cuarto? ¿Son sólo los muebles sus cosas, o también los ladrillos de sus paredes o incluso sus átomos? Las cantidades serían distintas, pero finitas. ¿O son también los puntos del espaciotiempo cosas de este cuarto? Entonces hay una cantidad infinita supernumerable de cosas en este cuarto. ¿Cuál es mi cardinalidad? ¿La del conjunto de mis órganos o la del conjunto de mis células actuales? ¿O incluye también mis percepciones, o mis posl* Hilary Putnam: Meaning and tbe Moral Sciences, pp. 118 y 140. 7 Hilary Putnam: Marhematics, Marter and Method, p. X. Ibídem, p. 78. ? Ibídem, p. 197. '0 Hilary Putnam: Meaning and the Moral Sciences, pp. 126 y 133. Sin embargo, ahora piensa Purnam que tal noción no tiene sentido, Véase «Defense of Intelecruai Realism», conferencia pronunciada en Madrid el 27 de marzo de 1985, en prensa. 306

__ ¿ESTÁ USTED A FAVOR O EN CONTRA DEL BIEN Y LA VERDAD? A A a —_ —— AA o A 1 A A A A KAKI e —Á bilidades de percepción, o los puntos del espaciotiempo (de 4 dimensiones, o de 11) que ocupo? Sólo en base a un realismo metafísico ingenuo puede pretenderse que el mundo fo este cuarto, o Hilary Putnam) tiene de por sí una cardinalidad determinada, O que el mundo tiene una lógica, O tiene una geometría. Más bien parece que somos nosotros los que tenemos (y aplicamos al mundo, con mayor o menor fortuna) lógicas, geometrías y estructuraciones conceptuales que permitan plantear con sentido la pregunta por la cardinalidad. | Quizá Putnam esté ahora de acuerdo con esto, o quizá no lo esté. En cualquier caso él ha renegado pública y repetidamente de su realismo metafísico anterior e incluso ha dado una famosa conferencia probando «por qué no hay un mundo ya hecho» '* La validez de las teorías Putnam (o al menos el primer Putnam) solía hablar —

 nadie se le ocurre decir que la lógica clásica, o la intuicionista, o la difusa, o la trivalente, o la que sea, es falsa, Una lógica no es el tipo de entidad de la que tenga sentido decir que es verdadera o falsa. Tampoco a (casi) nadie se le ocurre decir que una geometría (consistente) sea verdadera o falsa. Frege pensaba que las geometrías no euclídeas eran falsas. Y Putnam pensaba que la geometría euclídea era falsa. Pero la opinión estándar era y sigue siendo la de Hilbert. Gódel pensaba que una única teoría de conjuntos era verdadera. Pero también hay que echarle mucho entusiasmo al asunto para estar de acuerdo con él. Podemos hacer teoría de conjuntos con clases propias o sin ellas, continuista o no continuista, con axioma de elección o sín él, con cardinales inalcanzables o sin ellos, etc. Gódel pensaba que la contribución de las consecuencias de las diversas teorías a la resolución de los problemas clásicos abiertos de la teoría de números naturales zanjaría la cuestión. El primer Putnam llegó a pensar que la física zanjaría la cuestión. Más bien parece que no hay cuestión alguna que zanjar, y que las diversas teorías de conjuntos habiran con el mismo derecho nuestro universo teórico. El segundo Putnam ha subrayado '?* cómo el teorema de Lówenheim-Skolem arruina las pretensiones de verdad de una teoría de conjuntos frente a otras, pues no hay modo de concebir ni captar una verdad conjuntista independientemente de las formalizaciones concretas que representan las diversas teorías. Putnam pensaba que la mecánica clásica era falsa. Eso responde a la idea de que la mecánica clásica es una teoría concreta, unívocamente interpretada sobre la totalidad del universo. Si la mecánica clásica se concibe como una teoría abstracta, susceptible de interpretaciones o aplicaciones diversas a regiones o situaciones O sistemas distintos, entonces parece claro que la mecánica clásica vale o funciona en unos casos y no en otros. Y, en los casos en que funciona, es más cómoda y manejable que la relativista, por lo que sería irracional no emplearla. 12 En «Models and reality», publicado en el Journal of Symbolic Logic, 1980, y reimpreso en Hilary Putnam: Realism and Reason, 308

A xXx ——_un — e NA a 1 A A e 5 A e E Los estudiantes de física adquieren en las universidades todo un arsenal o bagaje de teorías mecánicas distintas, clásicas (newtoniana, lagrangiana...), relativistas (especial y general) y cuánticas (no relativista y relativista), Y aprenden a aplicar una teoría mecánica u otra, según la naturaleza del problema que se les presente. El físico competente suele aplicar la relatividad general a los problemas de cosmología, la mecánica clásica a los problemas a escala humana y la mecánica cuántica al mundo atómico y subatómico. De lo que se trata es de que sepa cuáles son los ámbitos de aplicación y los límites de cada teoría. Como decía el físico Fritz Rohrlich: «Las teorías físicas son aproximaciones caracterizadas por límites de validez, Pero los dominios de validez son muy grandes. Los efectos de la relatividad especial pueden ser ignorados sin peligro incluso a la gran velocidad a la que la Tierra gira en torno al Sol, 30 km por segundo; y la finitud de / (la constante de Planck) puede ser ignorada incluso para un minúsculo grano de plata en una emulsión fotográfica (10% átomos)... cuando vamos más allá de estos dominios, entramos en los dominios cuánticos o relativistas...» W A favor del pluralismo Yo simpatizo plenamente con los problemas y preocupaciones del segundo Putnam. Ha renunciado al ingenuo realismo metafísico y monista de su primera etapa, pero se resiste a caer por ello en la frivolidad de un relativismo fácil y subjetivista. El monismo es inaceptable, tanto en ciencia como en política. Hay muchas maneras posibles de enfocar la realidad física o social, y no sólo una. La noción de verdad total o de justicia total sólo conducen a la paralización de la empresa científica y a la dictadura del partido único. Por eso somos pluralistas. Pero, por otro lado, no todo da igual. Algunas hipótesis son falsas, algunas teorías son absurdas, algunos programas políticos son 3 Erizz Robrlich: «Facing Quantum Mechanical Reality», Science, 23 septiembre 1983, p. 1253. 309

 aborrecibles, Como dice Putnam, «conceder que hay más de una versión verdadera de la realidad no es negar que algunas versiones sean falsas» *%, La evolución de los animales refleja el ambiente en que se han desarrollado y representa una adaptación a dicho ambiente. Los animales no crean ni inventan su ambiente, pero tampoco el ambiente determina univocamente su modo de adaptación. Hay varias maneras distintas de adaptarse al mismo ambiente. Frente al mismo peligro, cabe la adaptación del camuflaje, o la de las armas, o la de la rapidez en la huida. La mutación de los genes es frívola y subjetiva. Pero la selección natural es realista y objetiva. El resultado final —la diversidad de especies bien adaptadas— es una manifestación de pluralismo objetivo. La metáfora de la evolución no es del todo buena, porque las mutaciones se producen al azar, pero las teorías científicas y los programas políticos y morales no se proponen al azar, sino intencionadamente. Quizá la metáfora mejor sea la del mercado. Los fabricantes de un bien o servicio determinado no proceden generalmente de un modo arbitrario y subjetivista, diseñando sus productos al azar, sino que tratan conscientemente de reflejar y satisfacer las necesidades y deseos de sus clientes potenciales, es decir, tratan de adaptarse al mercado. Á veces incluso realizan encuestas de márketing, para averiguar lo que el mercado realmente quiere. Pero lo que el mercado quiere no es algo unívoco. Los fabricantes más exitosos no se limitan a pretender leer pasivamente los deseos del mercado, sino que con frecuencia se adelantan a ellos e inventan nuevos productos y servicios en los que los consumidores no habían pensado, pero que luego encuentran general aceptación. Un nuevo producto es como una nueva hipótesis. En el mercado hay sitio para muchos productos, y un nuevo producto no desplaza necesariamente a los anteriores, aunque a la larga algunos dejen de venderse y producirse y desaparezcan del mercado. La actividad empresarial representa una adaptación objetiva pero pluriforme a las necesidades del mercado. '* Hilary Putnam: Realism and Reason, y. 19, 310

A A A a a o AA, La presunta dicotomía entre realismo monista y subjetivismo pluralista no da cuenta de la adaptación de las especies a su entorno ni de la adaptación de los bienes económicos al mercado. Tampoco da cuenta de la adaptación de las representaciones a lo representado. Hay muchas maneras de representar fotográficamente la realidad de un objeto. No sólo podemos fotografiar el objeto desde diferentes perspectivas y con iluminaciones diversas, sino que podemos también emplear sistemas de representación fotográfica distintos. La cámara fotográfica que fotografía una cabeza no crea la cabeza. Pero la cabeza no determina univocamente un tipo de fotografía. Una fotografía en blanco y negro es tan objetiva como una fotografía en color o una radiografía, La pregunta de cuál de ellas sea la verdadera o se aproxime más a la verdad carece de sentido. Lo que sí tiene sentido e interés es la pregunta por cuál sea el tipo de fotografía que mejor resuelva el problema que tengamos entre manos. Si se trata de detectar una fisura en el cráneo, lo racional será hacer una radiografía, pero la radiografía no refuta la foto normal en blanco y negro, ni ésta es una foto en color falsa, No se trata de condenar ni absolver a ningún sistema de fotografía, sino de evaluar su rendimiento respectivo frente a los diversos problemas o tareas. Hay también muchas maneras de representar cartográficamente una porción cualquiera de la superficie terrestre. La proyección cllíndrica, introducida por Mercator en 1569, es una proyección conforme, pues respeta los ángulos (por ello se emplea en las cartas de navegación), pero proporciona una escala no constante y exagera las latitudes altas, por lo que no sirve para cálculos de distancias. Otros sistemas de proyección cartográfica (azimutales, elípticos, isométricos, etc.) tienen ventajas e inconvenientes distintos. Así como el de Mercator conserva los ángulos, pero deforma las distancias, otros sistemas conservan las distancias, pero deforman los ángulos. Lo que no hay es una «verdad cartográfica» absoluta. Y los diversos sistemas de proyección no son aproximaciones a «la verdad». Pero cada sistema de proyección cartográfica puede ser

PP — —_—_—_———_—_ _— o _—__ 2 A A A A A A A A A a e e
comparado con otros, sus ventajas e inconvenientes pueden ser analizados y sopesados. En resumen, los diversos sistemas pueden ser evaluados, y, consecuentemente, podemos determinar objetiva y racionalmente cuál es el mejor sistema de representación cartográfica en circunstancias dadas y para un fin determinado.
Algo parecido pasa con los sistemas de representación simbólica. No hay una única manera de representar simbólicamente el mundo, no hay una única teoría adecuada u objetiva de la realidad. Los positivistas lógicos pensaban que las teorías científicas podían ser confirmadas o verificadas, Popper pensaba que las teorías científicas podían ser refutadas o falsadas. Pero ambas propuestas son impracticables, al menos en lo que se refiere a las teorías abstractas. Eso no significa que todo dé igual. Lo que podemos -—y debemos, si somos racionales— hacer es evaluar muestras teorías, como el fabricante evalúa la reacción del mercado frente a sus productos. No se trata de confirmar o refutar una teoría abstracta de un modo absoluto, sino de averiguar dónde y hasta qué punto y con qué margen de error vale o no vale, dónde es aplicable y dónde no. Si no es aplicable a ninguna situación interesante, podemos arrinconarla, pero con frecuencia nos encontraremos con que diversas teorías tienen ventajas distintas y diferentes ámbitos de aplicación o validez. Como dice Rohrlich, «la mecánica cuántica no relativista está ahora bien establecida, porque su dominio de validez es conocido» *”. Si somos racionales, pero no dogmáticos, y pluralistas, pero no frívolos, estaremos fundamentalmente interesados (tanto en el dominio de la teoría como en el de la praxis) no en la consagración ni en la excomunión, no en la confirmación ni en la refutación, sino en la evaluación. Muchas propuestas teóricas y prácticas son inaceptables. Pero otras muchas (incluso algunas incompatibles entre sí) son aceptables “hasta cierto punto”. Determinar hasta qué punto son aceptables es evaluarlas. Y evaluar una teoría o una moral no es medirla 15 Erirz Rohrlich: «Facing Quantum Mechnical Reality», Science, 23 septiembre 1983, p. 1253, nota 24. 312

¿ESTÁ USTED A FAVOR O EN CONTRA DEL BIEN Y La VERDAD? A con el rasero de la verdad" o "el bien", sino analizar críticamente su adecuación a circunstancias diversas y a fines cambiantes. Hablar en serio de la evaluación implicaría plantear el tema de la racionalidad, cosa que no voy a hacer ahora. Pero si alguien me pregunta «¿Está usted a favor o en contra del bien y la verdad?», me parece que voy a contestarle: «Yo lo que estoy es a favor de la racionalidad». 313

REFERENCIAS Y LECTURAS COMPLEMENTARIAS

Referencia general MOSTERÍN, Jesús, y Roberto "TORRETT1 (2002): Diccionario de Lógica y Filosofía de la Ciencia, Madrid, Alianza Editorial. Introducciones a la lógica BADESA, Calixto, Ignacio JANÉ y Ramón JANSANA (1998): Elementos de lógica formal, Barcelona, Anel. GARRIDO, Manuel (1995): Lógica simbólica (3.2 ed.), Madrid, "Lecnos. MOSTERÍN, Jesús (1983): Lógica de primer orden (3.2 ed.), Barcelona, Ariel. — (2000): Los lógicos, Madrid, Espasa-Calpe. Capítulos 1 (La estructura de los conceptos científicos) y 2 (Los conceptos métricos) HEMPEL, Carl (1952): Fundamentals of Concept Formation in Empirical Science, volumen 1, n. 7 of International Encyclopedia of the Unity of Science, University of Chicago Press. KLEIN, Arthur (1974): The World of Measurements, Nueva York, Simon and Schuster. KRANTZ, LUCE, SUPPES y TVERSKY (1971): Foundations of Measurement, vol. I (Additive and Polynomial Representacions). Volumen 11, 1989, Volumen 1, 1990. Nueva York, Academic Press. KYBURG, Henry, Jr. (1984): Theory and Measurement, Cambridge University Press. 315

NARENS, Louis (1985): Abstrac: Measurement Theory, Pr (Mass.), The MIT Press, ORTH, Bernhard (1974): Etnfúibrung in die Theorie des Messens, Stuttgart, Verlag Kohlhammer. PETLEY, Brian (1988): The Fundamental Physical Constants and the Frontier of Measurement, Bristol, Adam Hilger. PFANZAGL, Johann (1971): Theory of Measurement, Wiirzbuxrg, PhysicaVerlag, ROBERTS, Fred (1979): Measurement Theory (with Applications to Decisionmaking, Utility, and the Social Sciences). Volumen 7 de la Encyclopedia 0f Mathematics and 1ts Applications, Reading (Mass.), Addison-Wesley Publ. Co. STEGMULLER, Wolfgang (1970): Theorie und Erfabrung, Erster Haibband, Berlín-Heidelberg, Springer-Verlag. [Ed. cast.: Teoría y experiencia, Barcelona, Ariel, 1979.] Capítulos 3 (Taxonomía formal) y 4 (Mereología, conjuntos y ontología biológica) DOMOTOR, Z. (1970): «Qualitative information and entropy structures», en J. Hintikka y P. Suppes (ed.), Information and Inference, Dordrecht, Reidel, pp. 148-194. GHISELIN, Michael (1974): «A radical solution to the species problem», Systematic Zoology, 23, pp. 536-544. HULL, David (1978): «5. matter of individuality», Philosophy of Science, 45, pp. 335-360. KITCHER, Philip (1984): The Nature of Matbemarical Knowledge, Nueva York, Oxford University Press. —- (1987): «Ghostly whispers: Mayr, Ghiselin, and the “Philosophers” on the ontological status of species», Biology € Philosophy, 2, pp. 18410%: LEONARD, H., y N. GOODMAN (1940): «The calculus of individuals and tts uses», fournal of Symbolic Logic, 5, pp. 45-55. LOVELOCK, James (1979): Gaía. A new look at life on Earth, Londres, Penguin Books, MaYr, Ernst (1987): «The ontological status of species: Scientific progress and philosophical terminology», Biology e Philosophy, 2, pp. 145-166.

REFERENCIAS Y LECTURAS COMPLEMENTARIAS Ka a a CIÓN MISHLER, B., y R. BRANDON (1987): «Individuality, pluralism and the phylogenetic species concept», Biology * Philosophy, 2, pp. 397-414, MOSTERÍN, Jesús (1994): «Mereology, set theory, and biological ontology», en D. Prawitz y D. Westerstahl (eds.), Logic anda Philosophy of Science in Uppsala, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp. 511-524. —— (1998): ¡Vivan los animales!, Madrid, Debate. RIDLEY, Mark (1989): «The cladistic solution to the species problem», Biology % Philosophy, 4, pp. 1-16. SIMONS, Peter (1987): Parts. A Study in Ontology, Oxtord, Clarendon Press. WILLMANN, Rainer (1985): Die Art in Raum und Zeit. Das ArtRonzept in der Biologie und Palúontologte, Hamburgo, Paul Parey. Capítulos 5 (Materia y atomismo), 6 (Kant como filósofo de la ciencia) y 7 (La polémica entre Frege y Hilbert acerca del método axiomático) PREGE, Gottlob (1996): Escritos filosóficos, Barcelona, Crítica. (Incluye la traducción española de la polémica con Hilbert.) LORENZ, Konrad (1973): Die Rúckseite des Spiegels: Versuch einer Naturgeschichte menschlichen Erkennens, Múnich, Piper. MOSTERÍN, Jesús (2000): Los Lógicos, Madrid, Espasa-Calpe. SUPPES, Patrick (1974): «Aristotle's concept of matter and its relation to modern concepts of matter», Synthese, 28, pp. 27-50. Capítulos 8 (Historia y teoría abstracta), 9 (Teorías y modelos), 10 (Sobre el concepto de modelo) y 11 (Sobre teorias físicas y teorías matemáticas) BoYD, R., P. GASpER y J. TROUT (eds.) (1991): The Philosophy of Science, Cambridge (Mass.), The MIT Press. Díez, José, y Ulises MOULINES (1997): Fundamentos de filosofía de la ciencia, Barcelona, Ariel. MOSTERÍN, Jesús (1992): «T'heories and the flow of information», en Echeverría, Ibarra y Mormann (eds.), The Space of Mathematics: Philosophical, Epistemological and Historical Explorations, Berlin, Walter de Gruyter. 317

CONCEPTOS Y TEORÍAS EN LA CIENCIA A A AAA AAA A A A A e A a AAA A AA a MOULINES, Ulises (ed.) (1993): La ciencia: estructura y desarrollo, Madrid, Trotra. SKLAR, Lawrence (1992): Philosophy of Physics, Boulder, Westview. [Ed. cast.: Filosofía de la física, Madrid, Alianza Editorial, 1994.) TORRETTL Roberto (1990): Creative Understanding: Phitosopbical Reflections on Physics, The University of Chicago Press. TORRETTI, Roberto (1999): The Philosopby of Physics, Cambridge University Press. Capítulos 12 (El mundo se nos escurre entre las mallas de nuestras teorías), 13 (Bunge sobre individuos concretos) y 14 (Está usted a favor o en contra del bien y la verdad?) BUNGE, Mario (1977): Treatise on Basic Philosophy, vol. 3, Ontology: The Furniture of the World, Dordrecht, Reidel. EARMAN, John, y Jesús MOSTERÍN (1999): «A critical look at inflationary cosmology», Philosophy of Science, 66, pp. 1-49. GREGORY, Bruce (1988): Inventing Reality: Physics as Language, Nueva York, John Wiley. PurTnam, Hilary (1975): Philosopbical Papers, vols. 1 y 2. 1983, vol. 3. Cambridge University Press. (Véase sobre todo «Models and reality», incluido en el volumen 3.) Procedencia de los capítulos de este libro A. continuación se indica la procedencia inicial (aunque sometida a variaciones) de los capítulos: El 1, en Investigación y Ciencia (1978). El 2, en Moulines led.), La ciencia: estructura y desarrollo, Madrid: Trotta (1993). Los 3 y 6, en Enrabonar (1983, 1982). El 4, en Prawitz 8 Westerstahil (ed.), Logic ana Philosophy of Science in Uppsala, Dordrecht: Kluwer (1994)..Los 5 y 8 en Grandes temas de la felosofía actual, Barcelona: Salvar (1981). Los 7, 12 y 14 en Teorema (1980, 1982, 1987). El 9, en Garrido (ed.), Lógica y lenguaje, Madrid: Tecnos (1989). El 10, en Transparencies: Philosopbical Essays in Honor of' f. Ferrater Mora, New Jersey: Humanites Press (1981). El 11, en Aspectos de la filosofía de Y V. Quine, Valencia (1976). El 13, en Tbheoría (1985).